ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐỖ THỊ HỒNG NGA

XÂY DỰNG ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VỚI MỘT TẬP VÔ HẠN SỐ KHUYẾT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

....

ĐỖ THỊ HỒNG NGA

XÂY DỰNG ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH VỚI MỘT TẬP VÔ HẠN SỐ KHUYẾT

Chuyên ngành: **GIẢI TÍCH**

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. TẠ THỊ HOÀI AN

THÁI NGUYÊN – 2008

Mục lục

Lời mở đầu

Lý thuyết Nevanlinna ra đời vào những năm đầu của thế kỷ 20 và đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Lý thuyết Nevanlinna cổ điển nghiên cứu sự phân bố giá trị của hàm phân hình f thông qua *hàm đặc trưng* $T(f, a, r)$ - hàm đo cấp tăng của hàm phân hình, *hàm đếm* $N(f, a, r)$ - đếm số lần hàm f nhận giá trị a trong đĩa bán kính r, và *hàm xấp xỉ* $m(f, a, r)$ - đo độ gần đến a của hàm f (xem Định nghĩa 1.1.3, 1.1.1, và 1.1.2). Trọng tâm của lý thuyết này là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất thể hiện sự độc lập của hàm đặc trưng với mọi giá trị $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Định lý cơ bản thứ hai nói rằng với hầu hết các giá trị a, hàm đếm $N(f, a, r)$ trội hơn hẳn hàm xấp xỉ $m(f, a, r)$. Điều này dẫn đến định nghĩa *số khuyết* của hàm f tại giá trị a như sau

$$\delta(f, a) := \liminf_{r \to \infty} \{1 - \frac{N(f, a, r)}{T(f, a, r)}\}.$$

Giá trị a được gọi là *giá trị khuyết* cho hàm f nếu $\delta(f, a) > 0$. Quan hệ số khuyết là một dạng phát biểu khác của Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna, cụ thể là Nevanlinna đã chứng minh rằng

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \delta(f, a) \leqslant 2.$$

Mặt khác, Định lý cơ bản thứ nhất cho ta thấy rằng số khuyết của hàm phân hình tại một giá trị nào đó nằm trong đoạn $[0, 1]$. Hơn nữa người ta đã chứng minh được rằng tập các giá trị khuyết là đếm được. Như vậy một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Cho $1 \leq i \leq N \leq \infty$, giả sử $\{\delta_i\}$ là dãy các số thực không âm sao cho

$$0 < \delta_i \leq 1, \quad \sum_i \delta_i \leq 2.$$

Giả sử a_i, là các số phân biệt trong $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Tồn tại hay không hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$ thỏa mãn $\delta(f, a_i) = \delta_i$, và $\delta(f, a) = 0$ cho mọi $a \notin \{a_i\}$?

Câu hỏi trên còn được biết như là bài toán ngược của Nevanlinna.

Đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu bài toán ngược của Nevanlinna, cụ thể Nevanlinna [9], Lê Văn Thiêm [11], Hayman [4],... đã giải quyết bài toán này cho một số trường hợp đặc biệt. Đến năm 1976 vấn đề trên đã được giải quyết trọn vẹn bởi D. Drasin trong [3]. Trong công trình này, Drasin không chỉ xét bài toán ngược của Nevanlinna cho số khuyết mà còn cho số khuyết rẽ nhánh. Vậy, bài toán về sự tồn tại của hàm phân hình với hữu hạn hay vô hạn giá trị khuyết đã được nghiên cứu khá trọn vẹn.

Như ta đã biết hàm phân hình có thể được xem là đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Do đó, việc mở rộng lý thuyết Nevanlinna cổ điển cho các đường cong chỉnh hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với $n \geqslant 2$ là một điều tự nhiên. H. Cartan [1] đã chứng minh định lý sau (được gọi là định lý Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình cắt các siêu phẳng)

Định lý. Cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Cho $H_1, \ldots, H_q$ là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó

$$\sum_{j=1}^{q} \delta(H_j, f) \leqslant n + 1.$$

Tương tự với trường hợp hàm phân hình, người ta cũng nghiên cứu tính chất của số khuyết của đường cong chỉnh hình. Với $n \geqslant 2$, các ví dụ về đường cong chỉnh hình với hữu hạn giá trị khuyết đã được đưa ra bởi nhiều tác giả, trong khi đó, việc xây dựng đường cong chỉnh hình có vô hạn giá trị khuyết không dễ chút nào. Năm 2004, N. Toda [12] đã nghiên cứu và đưa ra các ví dụ cho đường cong chỉnh hình với một tập vô hạn giá trị khuyết.

Mục đích chính của luận văn là trình bày lại những kết quả đó của N. Toda một cách có chọn lọc theo bố cục riêng của tác giả nhằm trả lời một phần các câu hỏi trên.

Luận văn được chia thành 2 chương.

Chương1. Kiến thức chuẩn bị. Được trình bày với mục đích cung cấp các kiến thức cần thiết để cho người đọc dễ theo dõi chứng minh các kết quả của chương sau. Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số tính chất cơ bản của lý thuyết Nevanlinna: Các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình và cho đường cong chỉnh hình, quan hệ số khuyết cho hàm phân hình và những kiến thức liên quan, và chứng minh rằng tập hợp các giá trị a sao cho hàm số khuyết của một hàm phân hình tại điểm a dương là đếm được.

Chương 2. Đường cong chỉnh hình với vô số giá trị khuyết. Đây là chương chính của luận văn. Trong chương này, chúng tôi sẽ xây dựng các đường cong chỉnh hình có vô số số khuyết dương. Chương này được chia thành hai phần. Phần thứ nhất, chúng tôi đưa ra các kết quả bổ trợ như xây dựng lại khái niệm hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng, số khuyết, giá trị khuyết,... cho đường cong chỉnh hình và một số tính chất cơ bản, dễ thấy nhưng tương đối quan trọng vì nó được sử dụng nhiều khi chứng minh những kết quả sâu hơn ở những phần sau.
Phần thứ hai, trình bày các ví dụ về đường cong chỉnh hình với vô số giá trị khuyết. Kết quả chính của chương này là Định lý 2.2.8 và Định lý 2.2.9.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình, nghiêm túc của TS. Tạ Thị Hoài An. Dưới sự hướng dẫn của cô, tôi đã bước đầu làm quen và say mê hơn trong nghiên cứu toán. Nhân đây, tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới cô.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán, khoa Sau đại học ĐHSPTN, Viện Toán học Việt Nam, các thầy, cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập, đặc biệt là thầy Hà Trần Phương.

Tôi xin được gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp của tôi ở trường THPT Lương Thế Vinh Thái Nguyên, các anh, chị học viên lớp cao học khoá 14 đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập. Nhân đây, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới bạn Nguyễn Tuấn Long đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin được bày tỏ sự biết ơn tới gia đình: bố, mẹ, và em gái đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi được học tập và hoàn thành luận văn này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi sẽ nhắc lại một số tính chất cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và những kiến thức liên quan khác nhằm giúp cho người đọc dễ theo dõi. Các khái niệm và kết quả của chương này được trích dẫn từ [2], [5], [6], [9], ...

1.1 Các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình.

Giả sử f là hàm phân hình trong đĩa bán kính R và $r < R$.

Kí hiệu $n(f, \infty, r)$, (tương ứng, $\overline{n}(f, \infty, r)$), là số các cực điểm tính cả bội, (tương ứng, không tính bội), của hàm f trong đĩa đóng bán kính r. Giả sử $a \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa

$$n(f, a, r) = n\Big(\frac{1}{f-a}, \infty, r\Big),$$

$$\overline{n}(f, a, r) = \overline{n}\Big(\frac{1}{f-a}, \infty, r\Big).$$

1.1.1 Định nghĩa. *Hàm đếm tính cả bội* $N(f, a, r)$, (tương ứng, hàm đếm không tính bội $\overline{N}(f, a, r)$), của hàm f tại giá trị a được định nghĩa như sau

$$N(f, a, r) = n(f, a, 0)\log r + \int_0^r \Big(n(f, a, t) - n(f, a, 0)\Big)\frac{dt}{t},$$

(tương ứng,

$$\overline{N}(f,a,r) = \overline{n}(f,a,0)\log r + \int_0^r \Big(\overline{n}(f,a,t) - \overline{n}(f,a,0)\Big)\frac{dt}{t}).$$

Vì thế, nếu $a = 0$ ta có

$$N(f,0,r) = (\mathrm{ord}_0^+ f)\log r + \sum_{\substack{z\in\mathbf{D}(r)\\ z\neq 0}} (\mathrm{ord}_z^+ f)\log\mid \frac{r}{z}\mid,$$

trong đó $\mathbf{D}(r)$ là đĩa có bán kính r và $\mathrm{ord}_z^+ f = \max\{0, \mathrm{ord}_z f\}$ là bội của không điểm.

1.1.2 Định nghĩa. *Hàm xấp xỉ* $m(f,a,r)$ của hàm f tại giá trị $a \in \mathbb{C}$ được định nghĩa như sau

$$m(f,a,r) = \int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{1}{f(re^{i\theta}) - a}\Big|\frac{d\theta}{2\pi},$$

và

$$m(f,\infty,r) = \int_0^{2\pi} \log^+ \mid f(re^{i\theta})\mid \frac{d\theta}{2\pi},$$

trong đó $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.

Hàm $m(f,\infty,r)$ đo độ lớn trung bình của $\log|f|$ trên đường tròn $|z| = r$.

1.1.3 Định nghĩa. *Hàm đặc trưng* $T(f,a,r)$ của hàm f tại giá trị $a \in \mathbb{C}$ được định nghĩa như sau

$$T(f,a,r) = m(f,a,r) + N(f,a,r),$$

$$T(f,r) = m(f,\infty,r) + N(f,\infty,r).$$

Xét về mặt nào đó, hàm đặc trưng Nevanlinna đối với lý thuyết hàm phân hình có vai trò tương tự như bậc của đa thức trong lý thuyết đa thức. Từ định nghĩa hàm đặc trưng ta có

$$T(f,a,r) \geq N(f,a,r) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là một đại lượng bị chặn khi $r \to \infty$.

1.1.4 Định nghĩa. *Cấp* của hàm phân hình f được định nghĩa bởi công thức

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Nếu $\rho(f) = \infty$ thì f được gọi là có *cấp vô hạn*, nếu $0 < \rho(f) < \infty$ thì f được gọi là có *cấp hữu hạn*.

Giả sử $0 < \rho(f) < \infty$, đặt

$$C = \limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{r^{\rho}}.$$

Ta nói f có *dạng tối đại* nếu $C = \infty$, có *dạng trung bình* nếu $0 < C < \infty$, có *dạng tối tiểu* nếu $C = 0$.

1.1.5 Ví dụ. Nếu f là hàm hữu tỷ thì $T(f,r) = O(\log r)$, do đó hàm hữu tỷ có cấp 0. Nếu $f = e^z$ thì $T(f,r) = r/\pi + O(1)$, do đó e^z có cấp 1, dạng trung bình. Hàm e^{e^z} là hàm có cấp vô hạn.

Công thức Poisson - Jensen

1.1.6 Định lý. *Giả sử $f(z) \not\equiv 0, \infty$ là một hàm phân hình trong hình tròn $D = \{|z| \le R\}$ với $0 < R < \infty$. Giả sử a_μ, $\mu = 1, ..., M$ là các không điểm của f trong D, mỗi không điểm được kể một số lần bằng bội của nó.*

$b_\nu, (\nu = 1, 2, ..., N)$ là các cực điểm của f trong trong D, mỗi cực điểm được kể một số lần bằng bội của nó.

Khi đó, với mỗi $z = re^{i\theta} \in D$ sao cho $f(z) \neq 0, f(z) \neq \infty$ ta có

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2 - \overline{b}_\nu z}\right|. \qquad (1.1)$$

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàm $f(z)$ không có không điểm và cực điểm trong $\{|z| \leq R\}$, $z = 0$.

Khi đó ta cần chứng minh

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Do $f(z) \neq 0$ trong D nên $\log f(z)$ là hàm chỉnh hình trong D. Theo Định lý Cauchy, ta có:

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \log f(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\varphi})d\varphi.$$

Lấy phần thực hai vế ta có:

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\varphi})\right| d\varphi.$$

Trường hợp 2: Hàm $f(z)$ không có không điểm và cực điểm trong $\{|z| \leq R\}$, với z tuỳ ý, $z = re^{i\theta}(0 < r < R)$.

Xét ánh xạ bảo giác:

$$\{|\xi| \leqslant R\} \to \{\omega \leqslant 1\}$$

$$z \mapsto 0$$

$$\xi \neq z \mapsto \omega = \frac{R\,(\xi - z)}{R^2 - \overline{z}\xi}$$

Như vậy $|\varsigma| = R$ tương ứng với $|\omega| = 1$, vì

$$|\omega| = \frac{R\,|\xi - z|}{|R^2 - \overline{z}\xi|}$$