ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THÙY LINH

BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC TUYẾN TÍNH CẤP HAI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THÙY LINH

BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC TUYẾN TÍNH CẤP HAI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : 60 46 01 12

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS HÀ TIẾN NGOẠN

THÁI NGUYÊN, 2014

Mục lục

Công trình được hoàn thành tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS HÀ TIẾN NGOẠN

Phản biện 1: . . . .

Phản biện 2: . . . .

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
Vào hồi ......giờ...... ngày .... tháng .... năm 2014

Có thể tìm hiểu luận văn tại trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên
Và thư viện Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Mở đầu

Dựa trên chương II của tài liệu tham khảo [1], luận văn nghiên cứu bài toán biên của phương trình elliptic tuyến tính cấp hai, luận văn gồm có hai chương:

Chương I trình bày lý thuyết không gian Sobolev, phát biểu các định lý Riesz, định lý Lax-Milgram, và định lý Fredholm. Nêu định nghĩa các không gian $L^p(\Omega)$, định nghĩa đạo hàm riêng suy rộng và không gian $W_p^l(\Omega)$. Phát biểu định lý nhúng và vết của hàm số trên mặt cong $(n-1)$ chiều.

Chương II nghiên cứu nghiệm suy rộng của phương trình elliptic dạng bảo toàn bao gồm định nghĩa nghiệm suy rộng, chứng minh các bất đẳng thức cơ bản thứ nhất, bất đẳng thức cơ bản thứ hai, tính giải được của bài toán biên Dirichlet trong không gian $W_2^1(\Omega); W_2^2(\Omega)$ và xét tính trơn nghiệm suy rộng của phương trình elliptic tuyến tính cấp hai.

Chương 1

KHÔNG GIAN SOBOLEV

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Định lí 1.1. *(Định lý Riesz) Với một phiếm hàm tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert H luôn tồn tại một phần tử xác định duy nhất $f \in H$ sao cho $F(x) = (x, f)$ với mỗi $x \in H$ và $\|F\| = \|f\|$ và đồng thời ta có:*

$$(x, f) = \frac{F(x)}{F(f)}\|f\|^2$$

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x, f)|}{\|x\|}$$

$$\|f\|^2 = (f, f) = F(f)$$

Định lí 1.2. *(Định lý Lax-Milgram) Giả sử B là dạng song tuyến tính bức, bị chặn trên không gian Hilbert, tức là*

(i) $\exists M > 0 : |B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H$

(ii) $\exists \lambda > 0 : B(x, x) \geq \lambda||x||^2, \quad x \in H.$

Khi đó, với mọi phiếm hàm tuyến tính bị chặn $F \in H^*$, tồn tại duy nhất một phần tử $f \in H$ sao cho: $B(x, f) = F(x)$ với mọi $x \in H$.

Định lí 1.3. *(Định lý Fredholm) Giả sử H là không gian Hilbert và T là toán tử compact từ H vào chính nó, T^* là toán tử liên hợp của T. Khi đó, tồn tại một tập đếm được $\Lambda \subset R$ không có điểm giới hạn trừ ra có thể $\lambda = 0$ sao cho*

Nếu $\lambda \neq 0, \lambda \notin \Lambda$ phương trình

$$\lambda x - Tx = y, \quad \lambda x - T^*x = y \tag{1.1}$$

có nghiệm xác định duy nhất $x \in H$ với mọi $y \in H$ và các toán tử ngược $(\lambda I - T)^{-1}, (\lambda I - T^*)^{-1}$ là bị chặn.

Nếu $\lambda \in \Lambda$, các không gian con không của ánh xạ $\lambda I - T, \lambda I - Y^*$ có số chiều dương và hữu hạn, còn phương trình (1.1) giải được nếu và chỉ nếu y trực giao với không gian con không của $\lambda I - T^*$ trong trường hợp thứ nhất và của $\lambda I - T$ trong trường hợp còn lại.

1.2 Không gian $W_p^l(\Omega)$

1.2.1 Không gian $L^p(\Omega); (1 \le p \le +\infty)$

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$L^p(\Omega)$ là không gian Banach cổ điển gồm các hàm $u(x)$ đo được trên Ω và $||u(x)||^p$ khả tích, tức là:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx < +\infty. \tag{1.2}$$

Chuẩn của $L^p(\Omega)$ được định nghĩa bởi:

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx, \tag{1.3}$$

trong đó $|u(x)|$ là giá trị tuyệt đối, hoặc mođun của hàm $u(x)$

Không gian $L^2(\Omega)$ là Hilbert với tích vô hướng

$$(u, v)_{L^p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx. \tag{1.4}$$

1.2.2 Đạo hàm suy rộng

Giả sử $C_0^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm khả vi vô hướng có giá *suppu* compact trong Ω, trong đó

$$\sup u = \{x \in \Omega, u(x) \neq 0\}. \tag{1.5}$$

Giả sử $u(x) \in L^p(\Omega)$. Hàm số $w(x) \in L^p(\Omega)$ được gọi là đạo hàm riêng suy rộng theo biến x_j của hàm $u(x)$, Kí hiệu là:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = D_j u = w(x). \tag{1.6}$$

Nếu với mọi $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ta có:

$$\int\limits_\Omega w(x)v(x)dx = -\int\limits_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}dx. \qquad (1.7)$$

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ là đa chỉ số với $\alpha_j \in \mathbb{N}, |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ và $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Giả sử $u(x) \in L^p(\Omega)$. Hàm số $w_\alpha(x) \in L^p(\Omega)$ được gọi là đạo hàm riêng suy rộng, kí hiệu là:

$$D^\alpha u = w_\alpha.$$

Nếu với mọi $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ta có

$$\int\limits_\Omega v(x)w_\alpha(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}dx. \qquad (1.8)$$

1.2.3 Không gian $W_p^l(\Omega)$

Ta định nghĩa không gian $W_p^l(\Omega)$ là tất cả cá tập hợp trong $L^p(\Omega)$ sao cho mọi đạo hàm suy rộng của nó đều thuộc $L^p(\Omega)$, tức là:

$$W_p^l(\Omega) = \{u(x) \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \le l\}. \qquad (1.9)$$

Ta đưa vào $W_p^l(\Omega)$ chuẩn sau:

$$\|u\|^p_{W_2^l(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\le l} |D^\alpha u(x)|^p dx. \qquad (1.10)$$

Không gian $W_2^l(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u, v)_{W_2^l(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\le l} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)dx. \qquad (1.11)$$

1.2.4 Không gian $C^{k,\gamma}(\Omega)$

Không gian $C^k(\overline{\Omega})$ là tập hợp các hàm khả vi liên tục đến cấp k. Đây là không gian Banach với chuẩn:

$$||u(x)||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sup_{\overline{\Omega}} \sum_{|\alpha|\le k} |D^\alpha u(x)|, \qquad (1.12)$$

với $0 \le \alpha \le 1$ ta xét nửa chuẩn

$$[u]_{\gamma,\overline{\Omega}} = \sup_{\overline{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{1.13}$$

Không gian $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ là tập hợp các hàm $u(x) \in C^k(\overline{\Omega})$ sao cho $[D^{\alpha}u]_{\lambda,\overline{\Omega}} < +\infty, \forall |\alpha| = k$. Không gian $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ là không gian Banach với chuẩn

$$||u(x)||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} = ||u(x)||_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \le k} [D^{\alpha}u]_{\gamma,\overline{\Omega}}. \tag{1.14}$$

1.3 Định lý nhúng

Định lí 1.4. *Không gian $W_m^l(\Omega)$ được nhúng compact*

(i) vào trong các không gian $L^{mn/(n-lm)}(\Omega)$ nếu $lm < n$ và

(ii) vào trong $C^k(\overline{\Omega})$ nếu $0 \le k < l - \frac{n}{m}$.

Tức là ta có một phép nhúng:

$$W_m^l(\Omega) \subset \begin{cases} L^{nm/(n-lm)}(\Omega), & lm < n, \\ C^k(\overline{\Omega}), & 0 \le k < l - \frac{n}{m}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Điều này có nghĩa rằng tồn tại $C(\Omega) > 0$ sao cho với mọi $u(x) \in W_m^l(\Omega)$ ta có:

$$\|u\|_{p,\Omega} \le C(\Omega)\|u\|_{W_m^l(\Omega)}, \tag{1.16}$$

với $p = \dfrac{mn}{n-m}$ và

$$\max_{\Omega} |u| \le c(\Omega)\|u\|_{W_m^l(\Omega)}. \tag{1.17}$$

1.4 Vết của hàm số trên mặt cong

Giả sử $lm < n$. Khi đó, các hàm số $u(x) \in W_m^l(\Omega)$ có vết trên mặt cong $(n-1)$ chiều Γ chứa trong $\overline{\Omega}$ và thuộc không gian $L^q(\Gamma)$, tức là tồn tại $c > 0$ sao cho:

$$\|u\|_{L^q(\Gamma)} \le c\|u\|_{W_m^l(\Omega)}, \forall u \in W_m^l(\Omega), \tag{1.18}$$

trong đó $q = \dfrac{m(n-1)}{n-lm}$.

1.5 Không gian $W_2^{0,1}(\Omega)$

Không gian $W_2^{0,l}(\Omega)$ gồm các hàm $u(x) \in W_p^l(\Omega)$ sao cho các đạo hàm suy rộng đến cấp $(l-1)$ có vết trên $\partial\Omega$.

Không gian Hilbert $W_2^{0,1}(\Omega)$ có vai trò chủ yếu trong việc nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic cấp hai. Giải sử Ω là miền bị chặn, tích vô hướng trong không gian $W_2^{0,1}(\Omega)$ được định nghĩa bởi công thức như trong $W_2^1(\Omega)$ như sau:

$$(u,v)_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (uv + u_x v_x) dx. \tag{1.19}$$

Trong không gian $W_2^{0,1}(\Omega)$ có thể đưa vào một tích vô hướng mới như sau:

$$[u,v] = \int\limits_{\Omega} u_x v_x dx. \tag{1.20}$$

Thật vậy, ta có bất đẳng thức Poincase sau đây: tồn tại $c_\Omega > 0$ sao cho với mọi $u(x) \in W_2^{0,1}(\Omega)$ ta có:

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \le c_\Omega \int\limits_{\Omega} u_x^2 dx. \tag{1.21}$$