ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHÍ THỊ BÍCH HÀ

VẤN ĐỀ CHỌN THAM SỐ TRONG PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH TÌM NGHIỆM CHUNG CHO MỘT HỆ HỮU HẠN PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỈNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHÍ THỊ BÍCH HÀ

VẤN ĐỀ CHỌN THAM SỐ TRONG PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH TÌM NGHIỆM CHUNG CHO MỘT HỆ HỮU HẠN PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỈNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong những bài toán nảy sinh từ thực tế, tồn tại một lớp các bài toán mà nghiệm không ổn định theo nghĩa một thay đổi nhỏ của dữ liệu đầu vào sẽ dẫn đến những thay đổi lớn của dữ liệu đầu ra (nghiệm của bài toán), thậm chí còn làm cho bài toán trở lên vô nghiệm. Lớp các bài toán trên được gọi là lớp các bài toán không chính qui hay bài toán đặt không chỉnh.

Khái niệm bài toán đặt không chỉnh được J. Hadamard đưa ra khi nghiên cứu ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình elliptic cũng như parabolic. Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình

$$A(x) = f \tag{1}$$

ở đây, A là toán tử từ không gian metric X vào không gian metric Y. Theo J. Hadamard bài toán (1) được gọi là bài toán đặt chỉnh (chính qui) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

1. Phương trình (1) có nghiệm x_0 với mọi $y \in Y$;
2. Nghiệm x_0 được xác định một cách duy nhất;
3. Nghiệm x_0 phụ thuộc liên tục vào f.

Một thời gian dài người ta nghĩ rằng mọi bài toán đặt ra đều thỏa mãn cả ba điều kiện trên. Nhưng thực tế chỉ ra rằng ý niệm đó sai lầm. Nhất là khi máy tính điện tử ra đời, trong tính toán các bài toán thực tế bằng máy tính luôn xảy ra trong quá trình làm tròn số. Chính sự làm tròn đó dẫn đến những sai lệch đáng kể.

Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không được thỏa mãn thì bài toán (1) được gọi là bài toán đặt không chỉnh. Do lớp bài toán đặt không chỉnh có tầm quan trọng trong ứng dụng thực tế, nên nó đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học nổi tiếng trên thế giới. Một số nhà toán học Việt Nam cũng đi sâu nghiên cứu và có nhiều đóng góp cho lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh như: Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường, Đinh Nho Hào, Đặng Đức Trọng...

Để giải số bài toán đặt không chỉnh, bước đầu tiên Tikhonov đã đưa về bài toán đặt chỉnh bằng cách giả thiết là nghiệm cần tìm nằm vào trong một tập compact lồi M và ảnh $A(M) = N$ sao cho khi f xấp xỉ bởi $f_\delta \in N$ ta vẫn có nghiệm x_δ thỏa mãn $Ax_\delta \in N$. Do số liệu xấp xỉ là số liệu không chính xác, nên có thể xấp xỉ f_δ lại không nằm vào tập $A(M)$. Khi đó, phương trình $A(x) = f_\delta$ không có nghiệm theo nghĩa thông thường. Để khắc phục tình trạng này, V. K. Ivanov đã đưa ra khái niệm tựa nghiệm cho phương trình (1). Theo V. K. Ivanov phần tử $\tilde{x} \in M$ làm cực tiểu phiếm hàm $\inf\limits_{x\in M} \rho_Y(A(x), f)$ được gọi là tựa nghiệm của (1) trên tập M, trong trường hợp M là tập compact của X, thì mọi $f \in Y$ bao giờ cũng tồn tại tựa nghiệm. Nếu $f \in A(M)$ thì tựa nghiệm chính là nghiệm thông thường. Tựa nghiệm cũng như nghiệm thông thường có thể không duy nhất.

Năm 1963, Tikhonov đưa ra một hướng mới giải quyết bài toán (1), đó là việc cực tiểu hóa phiếm hàm phụ thuộc tham số

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \rho^2(A(x), f_\delta) + \alpha\psi(x), \tag{2}$$

ở đây ψ là phiếm hàm ổn định trên không gian metric X, α là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc δ, $\alpha = \alpha(\delta)$ được chọn sao cho khi $\delta \to 0$, ta có $\alpha(\delta) \to 0$ và điểm cực tiểu x_α^δ của phiếm hàm (2) hội tụ đến nghiệm của bài toán (1).

Đối với bài toán (1), khi $A : H \to H$ (H là không gian Hilbert), là một toán tử liên tục và đóng yếu, H. W. Engl đã xét dạng cụ thể của (2) là

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \|Ax - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \tag{3}$$

và chứng minh được bài toán (3) có nghiệm phụ thuộc liên tục vào f_δ và hội tụ về nghiệm của (1) khi $f_\delta \to f$.

Trong trường hợp A là toán tử đơn điệu và hemi liên tục từ không gian

Banach X vào X^*, Alber và Ryazantseva đã xây dựng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov dựa vào việc giải phương trình

$$A(x) + \alpha J^s(x) = f_\delta, \tag{4}$$

ở đây, J^s là toán tử đối ngẫu tổng quát của X, tức là $J^s : X \to X^*$, thỏa mãn điều kiện

$$\langle J^s(x), x\rangle = \|x\| \, \|J^s(x)\|, \ \|J^s(x)\| = \|x\|^{s-1}, s \geq 2.$$

Trong vài năm gần đây, do nhu cầu thực tế người ta đã xét mở rộng bài toán (1) cho một họ hữu hạn phương trình đặt không chỉnh tức là tìm nghiệm x_0 sao cho

$$A_i(x_0) = f_i, i = 1, 2, ..., N, \tag{5}$$

ở đây, $A_i : X \to Y_i$, X và Y_i là các không gian Hilbert. Hệ phương trình (5) có thể đưa về một phương trình (1), với $A : X \to Y$ được xác định bởi $A(x) = (A_1(x), A_2(x), \ldots, A_N(x))$, $Y := Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_N$ và $f = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$.

Có thể coi (1) như là trường hợp riêng của (5) khi $N = 1$. Tuy nhiên (5) có lợi hơn (1) ở chỗ (5) đề cập riêng rẽ từng tính chất của (A_i, f_i), còn (1) cho ta tính chất chung của (A_i, f_i) và nghiệm của (1) phải thỏa mãn các tọa độ giống nhau.

Dựa trên khoảng cách Bregman

$$D\left(x^\delta, x_0\right) := J\left(x^\delta\right) - J(x_0) - \left\langle J'(x_0), x^\delta - x_0\right\rangle$$

Hein đã đưa ra các kết quả về tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh x^δ về nghiệm x_0 của hệ khi bổ sung điều kiện nguồn lên tất cả các toán tử $A_i, i = 1, 2, ..., N$.

Trong trường hợp A_i là các dưới vi phân của các phiếm hàm lồi trên không gian Banach, Nguyễn Bường đã xây dựng phương pháp hiệu chỉnh dựa vào việc giải phương trình

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha^{\mu_i} A_i(x) + \alpha J(x) = \theta, \tag{6}$$

$$\mu_1 = 0 < \mu_i < \mu_{i+1} < 1, i = 2, ..., N-1,$$

ở đây, $J(x)$ là toán tử đối ngẫu chuẩn tắc từ X vào X^*, tức $J(x) = J^2(x)$.

Khi $A_i : H \rightarrow H$ là các toán tử đơn điệu và liên tục, GS.TS Nguyễn Bường và TS Nguyễn Thị Thu Thủy đã đề xuất phương pháp hiệu chỉnh lặp bậc không tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán

$$A_i(x) = \theta, i = 1, 2, ..., N, \tag{7}$$

bằng hồ sơ lặp

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \beta_k \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_k^i A_i \left(x^{(k)} \right) + \alpha_k^{N+1} \left(x^{(k)} - x_* \right) \right), \tag{8}$$

ở đây, xấp xỉ đầu $x^{(0)}$ và x_* là phần tử trong không gian H và α_k, β_k là các dãy số dương.

Hệ (7) cũng được GS.TSKH Phạm Kỳ Anh và GS.TS Cao Văn Chung xét đến khi $A_i : H \rightarrow H$ có tính chất ngược đơn điệu mạnh bằng phương pháp hiệu chỉnh lặp song song. Các kết quả đạt được của phương pháp cho nghiệm hiệu chỉnh hội tụ về nghiệm có chuẩn nhỏ nhất.

Trong luận văn này, chúng ta xét các phương pháp hiệu chỉnh, cách chọn tham số và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh. Trong trường hợp các toán tử $A_i : X \rightarrow X$ là J- đơn điệu và liên tục Lipschitz trên không gian Banach phản xạ và lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều, chúng ta xét phương pháp hiệu chỉnh (5) dựa vào việc giải phương trình

$$A_0(x) + \alpha^{\mu} \sum_{i=1}^{N} \left(A_i(x) - f_i^{\delta} \right) + \alpha (x - x_*) = f_0^{\delta} \tag{9}$$

và đưa ra cách chọn tham số $\alpha = \alpha(\delta)$, ở đây $\mu \in (0, 1)$ là hằng số cố định. Theo phương pháp này, tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh được đánh giá mà chỉ cần dựa vào điều kiện đặt lên một toán tử A_0.

Các kết quả đạt được trong luận văn này là kết quả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên. Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành hai chương:

Chương 1. Một số khái niệm cơ bản.

Trong chương này ta trình bài các khái niệm cơ bản về không gian

Banach và bài toán đặt không chỉnh, thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov. Từ đó giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh cho hệ phương trình với toán tử đơn điệu. Trên cơ sở hiệu chỉnh cho phương trình, chương này còn giới thiệu bài toán dẫn đến hệ phương trình toán tử đặt không chỉnh và các phương pháp hiệu chỉnh.

Chương 2. Hiệu chỉnh cho hệ phương trình có toán tử J- đơn điệu.

Trong chương này ta trình bày phương pháp hiệu chỉnh cho hệ phương trình đối với toán tử J- đơn điệu và liên tục Lipschitz trên không gian Banach phản xạ và lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều.

Tôi mong muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy giáo Giáo sư - Tiến sĩ Nguyễn Bường, thầy đã rất tận tình hướng dẫn, chỉ bảo tôi trong quá trình tôi thực hiện luận văn và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới các giáo sư, tiến sĩ ở Viện Toán học, Viện công nghệ thông tin thuộc Viện Hàn Lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các thầy cô giáo trong trường Đại học Khoa học nói chung và khoa Toán - Tin nói riêng đã hết lòng giảng dạy, truyền đạt cho tôi nhiều kiến thức khoa học trong suốt quá trình tôi học tập tại trường.

Cuối cùng, tôi cũng muốn cảm ơn đến người thân, bạn bè đã cổ vũ tôi trong suốt thời gian vừa qua.

Do điều kiện thời gian và trình độ có hạn nên luận văn này không thể tránh khỏi có nhiều thiếu sót. Tôi rất mong sẽ nhận được nhiều ý kiến đóng góp của thầy cô và các bạn.

Hải Phòng, ngày 11 tháng 10 năm 2014

Tác giả

Phí Thị Bích Hà

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản

Chương này chúng tôi sẽ trình bày các khái niệm cơ bản trong không gian Banach, toán tử đơn điệu và J- đơn điệu. Khái niệm bài toán đặt không chỉnh, thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov. Đồng thời giới thiệu về phương pháp hiệu chỉnh với toán tử đơn điệu. Các kiến thức này được tham khảo trong các tài liệu [1], [2], [3], [7], [8].

1.1 Không gian Banach - Toán tử đơn điệu và J-đơn điệu

1.1.1 Không gian Banach

Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\|x\|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:
1) $\|x\| > 0, \forall x \neq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$;
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$, (bất đẳng thức tam giác).
Một không gian định chuẩn đầy đủ là không gian Banach.
+) Sự hội tụ trong không gian Banach:

Dãy các phần tử x_n không gian Banach X được gọi là hội tụ đến phần tử $x_0 \in X$ khi $n \to \infty$, nếu khi $n \to \infty$, ký hiệu là $x_n \to x_0$. Sự hội tụ đó được gọi là hội tụ mạnh.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là hội tụ yếu đến $x_0 \in X$, ký hiệu là x_n

hội tụ yếu tới x_0, nếu với $\forall f \in X^*$ là không gian liên hợp của X, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$, khi $n \to \infty$.
Từ định nghĩa trên ta có tính chất sau:

i) Từ sự hội tụ mạnh của một dãy $\{x_n\}$ suy ra sự hội tụ yếu của dãy đó.

ii) Giới hạn yếu của một dãy nếu có là duy nhất.

iii) Nếu $x_n \to x$ thì $\sup\limits_{1 \le n < \infty} \|x_n\| < \infty$ và $\|x\| \le \lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\|$.

Nhận xét 1.1. *Một số trường hợp hội tụ yếu có thể suy ra hội tụ mạnh là:*
i) X là không gian định chuẩn hữu hạn chiều.
ii) $\{x_n\} \subset M$ với M là một tập compact trong X.

+) Không gian phản xạ

Giả sử X là không gian định chuẩn thực, X^* là không gian liên hợp của X và gọi $X^{**} = L(X^*)$ là không gian liên hợp thứ hai của X. Ta cho tương ứng với mỗi $x \in X$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục x^{**} trên X^{**} nhờ hệ thức

$$\langle x^{**}, f \rangle = \langle f, x \rangle, \forall f \in X^{**}$$

ở đây $\langle f, x \rangle$ là kí hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in X^*$ tại $x \in X$. Ta có $\|x\| = \|x^{**}\|$. Đặt $h(x) = x^{**}$, nếu $h : X \to X^{**}$ là toàn ánh thì không gian X được gọi là không gian phản xạ.

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b]$ với $1 \le p < \infty$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|\phi\| = \left(\int_a^b |\phi(x)^p \, dx| \right)^{\frac{1}{p}}, \phi \in L^p[a, b].$$

Ví dụ 1.2. Không gian $L^p[a, b], p > 1$ là không gian phản xạ. Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều phản xạ.

Định lý 1.2. *Nếu X là không gian Banach thì các khẳng định sau là tương đương:*
1) X phản xạ,