ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRƯỜNG GIANG

VỀ DẠNG ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO CÁC ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN TRƯỜNG GIANG

VỀ DẠNG ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO CÁC ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành: **GIẢI TÍCH**
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. TẠ THỊ HOÀI AN

THÁI NGUYÊN – 2008

Mục lục

Mở đầu

Lý thuyết phân bố giá trị của Nevanlinna được đánh giá là một trong những thành tựu đẹp đẽ và sâu sắc của toán học trong thế kỷ hai mươi. Được hình thành từ những năm đầu của của thế kỷ, lý thuyết Nevanlinna có nguồn gốc từ những công trình của Hadamard, Borel và ngày càng có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Lý thuyết phân bố giá trị cổ điển là sự tổng quát hóa định lý cơ bản của đại số, chính xác hơn, lý thuyết nghiên cứu sự phân bố giá trị của các hàm phân hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Trung tâm của lý thuyết này gồm hai định lý cơ bản của Nevanlinna. Định lý cơ bản thứ nhất là một cách viết khác của công thức Poisson - Jensen, định lý này nói rằng hàm đặc trưng $T(r, a, f)$ không phụ thuộc vào a nếu tính sai khác một đại lượng bị chặn, trong đó a là một số phức tùy ý. Định lý cơ bản thứ hai thể hiện những kết quả đẹp nhất, sâu sắc nhất của lý thuyết phân bố giá trị, định lý này đưa ra mối quan hệ giữa hàm đặc trưng và hàm xấp xỉ.

Năm 1933, H. Cartan [3] đã chứng minh định lý sau đây:

Cho $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính, H_i, $i = 1, ..., q$, là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Với *mỗi $\varepsilon > 0$ ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} m(r, H_j, f) \leq (n + 1 + \varepsilon)T(r, f),$$

trong đó bất đẳng thức đúng với mọi $r > 0$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Kết quả trên của H. Cartan là công trình đầu tiên về mở rộng lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình. Sử dụng kết quả đó ông đã đưa ra các ước lượng số khuyết cho các đường cong chỉnh hình giao với các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của ông đã được đánh giá là hết sức quan trọng và mở ra một hướng nghiên cứu mới cho việc phát triển lý thuyết Nevanlinna. Bởi vậy, lý thuyết Nevanlinna cho các đường cong chỉnh hình sau này được mang tên hai nhà toán học nổi tiếng của thế kỷ 20, đó là “Lý thuyết Nevanlinna - Cartan".

Những năm gần đây, việc mở rộng kết quả của Cartan cho trường hợp các siêu mặt thu hút được sự chú ý của nhiều nhà toán học. Năm 2004, M. Ru [12] đã chứng minh giả thuyết của B. Shiffman [14] đặt ra vào năm 1979. Cụ thể, ông đã chứng minh rằng: *Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, $D_j, j = 1, ..., q$, là các siêu mặt bậc d_j ở vị trí tổng quát. Khi đó*

$$(q - (n + 1) - \varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N(r, D_j, f) + o(T(r, f)),$$

trong đó bất đẳng thức trên đúng với mọi r đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Kết quả trên đã được Q. Yan và

Z. Chen [4] mở rộng cho trường hợp hàm đếm tính đến bội chặn (hay còn gọi là hàm đếm cụt). Kết quả được phát biểu như sau:

Giả sử $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số và* D_j*,* $1 \leq j \leq q$ *là* q *siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc* d_j *tương ứng, ở vị trí tổng quát. Khi đó với mỗi* $\varepsilon > 0$*, tồn tại một số nguyên dương* M *sao cho*

$$q - (n+1) - \varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^{q} d_j^{-1} N^M(r, D_j, f) + o\left(T(r, f)\right),$$

trong đó bất đẳng thức trên đúng với mọi r *đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Cho đến nay, khi nghiên cứu sự tồn tại của các ánh xạ chỉnh hình thông qua ảnh ngược của các siêu mặt, người ta thường sử dụng định lý cơ bản thứ hai kiểu Nevanlinna - Cartan thông qua hàm đếm tính đến bội chặn. Ngoài ra định lý Nevanlinna - Cartan còn cho ta hiểu thêm về tính suy biến của đường cong chỉnh hình.

Mục tiêu chính của luận văn là trình bày lại các kết quả đã được đưa ra của Q. Yan và Z. Chen với công cụ nghiên cứu chủ yếu là Lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho các ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Luận văn được chia thành 2 chương cùng với phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ sở về hàm phân hình, các định nghĩa và tính chất của các hàm Nevanlinna. Trình bày chứng minh định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna cho hàm phân hình.

Chương 2 trình bày chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ chỉnh hình cắt các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Chương này được viết dựa trên công trình của Q. Yan, Z. Chen [4].

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Tạ Thị Hoài An**. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến TS về sự giúp đỡ khoa học mà TS đã dành cho tác giả và đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tác giả hoàn thành luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các thầy cô giáo trường Đại học Sư phạm thuộc Đại học Thái Nguyên, đặc biệt là Thày **Hà Trần Phương** và các thầy cô giáo trường Đại học Sư phạm Hà Nội và các thầy cô giáo Viện Toán học đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khóa học và luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường Cao đẳng Công nghệ và Kinh tế Công nghiệp, gia đình, bạn bè đã tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cho tác giả trong quá trình học tập.

Chương 1

Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

Trong chương này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản sẽ được sử dụng trong các phần sau. Các kiến thức của chương này được trích dẫn từ [1], [5], [7], [9], ...

1.1 Hàm phân hình

1.1.1 Định nghĩa. Cho D là một miền trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ được gọi là $\mathbb{C}$-*khả vi* tại $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.
Giá trị đó được gọi là *đạo hàm phức* của hàm $f(z)$ tại z_0.
Hàm $f(z)$ được gọi là $\mathbb{C}$-*khả vi* trong D nếu nó $\mathbb{C}$ - khả vi tại mọi $z_0 \in D$.

1.1.2 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình tại* $z_0 \in \mathbb{C}$ nếu nó $\mathbb{C}$ - khả vi trong một lân cận nào đó của z_0.
Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình trên* D nếu nó chỉnh hình tại mọi

điểm z thuộc D.

Tập các hàm chỉnh hình trên miền D, kí hiệu là $H(D)$.

1.1.3 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được gọi là *hàm nguyên.*

1.1.4 Định lý. *Hàm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ chỉnh hình trên D nếu các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là $\mathbb{R}^2$ - khả vi trên D và trên đó các hàm $u(x, y)$, $v(x, y)$ thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann, tức là*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \forall\, (x, y) \in D.$$

1.1.5 Định lý. *Giả sử $f(z)$ là một hàm chỉnh hình trong miền hữu hạn $D \subset \mathbb{C}$. Khi đó trong mỗi lân cận của mỗi điểm $z \in D$, hàm $f(z)$ được khai triển thành chuỗi*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots \tag{1.1}$$

Hơn nữa, chuỗi trên hội tụ đều đến hàm $f(z)$ trong hình tròn $|z - z_0| \leq \rho$ tùy ý nằm trong D.

Chuỗi (1.1) được gọi là *chuỗi Taylo* của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm z_0.

1.1.6 Định nghĩa. Điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ được gọi là *không điểm bậc $m > 0$* (hay không-điểm cấp $m > 0$) của hàm $f(z)$ nếu $f^{(n)}(z_0) = 0$, cho mọi $n = 1, ..., m - 1$ và $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

1.1.7 Định nghĩa. Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong $D \subset \mathbb{C}$ nếu $f = \dfrac{g}{h}$ trong đó g, h là các hàm chỉnh hình trong D.

Nếu $D = \mathbb{C}$ thì ta nói $f(z)$ phân hình trên $\mathbb{C}$ hay đơn giản là $f(z)$ là *hàm phân hình.*

1.1.8 Định nghĩa. Điểm z_0 được gọi là *cực điểm cấp* $m > 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0 hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^m}.h(z)$, trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$.

1.1.9 Định lý (Công thức Poiison - Jensen). *Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong hình tròn $\{|z| \le R\}$ với $0 < R < \infty$. Giả sử a_μ, $\mu = 1, ..., M$, là các không điểm kể cả bội, b_ν, $\nu = 1, 2, ..., N$, là các cực điểm của f trong hình tròn đó, cũng kể cả bội. Khi đó, nếu $z = re^{i\theta}(0 < r < R)$, $f(z) \neq 0, f(z) \neq \infty$ thì*

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \\ + \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z-b_\nu)}{R^2 - \overline{b}_\nu z}\right|.\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

1.2.1 Các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình

Giả sử f là hàm phân hình trong đĩa bán kính R và $r < R$.

Ký hiệu $n(r, \infty, f)$ (tương ứng, $\overline{n}(r, \infty, f)$, là số các cực điểm tính cả bội, (tương ứng, không tính bội)), của hàm f trong đĩa đóng bán kính r. Giả sử $a \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa

$$n(r, a, f) = n\Big(r, \infty, \frac{1}{f-a}\Big),$$