



Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán - Tập 7

# HÌNH HỌC

Giáo trình và  
400 bài tập có lời giải



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



DUNOD

Jean-Marie Monier

Giáo trình Toán

Tập 7

# HÌNH HỌC

Giáo trình và 400 bài tập có lời giải

*(Tái bản lần thứ hai)*

*Người dịch :*

Nguyễn Chi

*Hiệu đính :*

Đoàn Quỳnh

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

# Lời nói đầu

Bộ giáo trình Toán mới này, với nhiều bài tập có lời giải, được biên soạn dành cho sinh viên giai đoạn I các trường đại học công nghệ quốc gia (năm thứ 1 và thứ 2, mọi chuyên ngành), cho sinh viên giai đoạn I đại học khoa học, và cho các thí sinh dự thi tuyển giáo sư trung học phổ thông.

Bố cục của bộ giáo trình như sau:

Tập 1 : Giải tích 1 }  
Tập 2 : Giải tích 2 } *Giải tích* năm thứ 1

Tập 3 : Giải tích 3 }  
Tập 4 : Giải tích 4 } *Giải tích* năm thứ 2

Tập 5 : Đại số 1: *Đại số* năm thứ 1

Tập 6 : Đại số 2: *Đại số* năm thứ 2

Tập 7 : Hình học: *Hình học* năm thứ 1 và thứ 2.

Để kiểm chứng mức độ lĩnh hội kiến thức, trong mỗi chương độc giả sẽ thấy nhiều bài tập có lời giải in ở cuối sách. Trừ một vài trường hợp đặc biệt, các bài tập này đều khác với những bài đã có trong bộ bài tập có lời giải gồm tám tập mới xuất bản.

Nhiều vấn đề ở ranh giới của chương trình được đề cập ở cuối chương, dưới dạng các bổ sung có giải.

Tác giả rất mong nhận được những lời phê bình và gợi ý của độc giả. Xin vui lòng gửi các ý kiến đến Nhà xuất bản Dunod, 5, phố Laromiguière, 75005 Paris.

Jean-Marie Monier

## Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ ở đây lòng biết ơn đối với nhiều bạn đồng nghiệp đã vui lòng đọc lại từng phần của bản thảo hoặc của bản đánh máy là : Henri Baroz, Alain Bernard, Jean-Philippe Berne, Isabelle Bigeard, Gérard Bourgin, Gérard Cassayre, Gilles Demeusois, Catherine Dony, Hermin Durand, Marguerite Gauthier, André Gruz, Annie Michel, Michel Pernoud, René Roy, Philippe Saunois.

Sau cùng, tôi chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Dunod, Gisèle Maïus và Michel Mounic, mà năng lực cũng như lòng kiên trì đã tạo điều kiện cho các tập sách này ra đời.

Jean-Marie Monier

# Mục lục

## Phần thứ nhất - Giáo trình

### Chương 1. - Hình học afin trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều

<b>1.1</b>	Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$	3
1.1.1	Nhắc lại về $\mathbb{R}$ - kgv $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$	3
1.1.2	Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$	3
<b>1.2</b>	Đường thẳng và mặt phẳng afin	6
1.2.1	Đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_2$	6
1.2.2	Mặt phẳng afin trong $\mathcal{A}_3$	14
1.2.3	Đường thẳng afin trong $\mathcal{A}_3$	19
<b>1.3</b>	Hệ quy chiếu Descartes	29
<b>1.4</b>	Ánh xạ afin	33
1.4.1	Đại cương	33
1.4.2	Các ví dụ thông thường về ánh xạ afin	35
<b>1.5</b>	Tâm tỷ cự, tính lồi	
1.5.1	Tâm tỷ cự	44
1.5.2	Tính lồi	48

### Chương 2. - Hình học afin Euclide trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều

<b>2.1</b>	Nhắc lại về hình học vectơ Euclide trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$	53
2.1.1	Tích vô hướng dạng chính tắc	53
2.1.2	Tính trực giao	54
2.1.3	Tích hỗn hợp và tích vectơ trong $\mathbb{R}^3$	55
2.1.4	Các tự đồng cấu trực giao của $\mathbb{R}^2$ hoặc $\mathbb{R}^3$	57
<b>2.2</b>	Hình học Euclide phẳng	62
2.2.1	Khoảng cách, góc	62
2.2.2	Các phép đẳng cự afin của mặt phẳng	67
2.2.3	Các phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng	70

2.2.4 Đường tròn trong mặt phẳng	75
2.2.5 Đường conic trong mặt phẳng afin Euclide	82
2.2.6 Ứng dụng số phức trong hình học Euclide phẳng	91
<b>2.3 Hình học afin Euclide trong không gian Euclide ba chiều</b>	108
2.3.1 Khoảng cách, góc	108
2.3.2 Các phép đẳng cự afin của $\mathcal{E}_3$	
Bổ sung	127

### Chương 3. - Hình học afin thực

<b>3.1 Cấu trúc afin chính tắc của một không gian vectơ</b>	143
3.1.1 Điểm	143
3.1.2 Phép tịnh tiến	144
<b>3.2 Không gian afin con của một không gian vectơ</b>	145
3.2.1 Đại cương	145
3.2.2 Tính song song	146
<b>3.3 Ánh xạ afin</b>	149
3.3.1 Đại cương	149
3.3.2 Các ví dụ thông thường về ánh xạ afin	151
<b>3.4 Các hệ quy chiếu Descartes</b>	155
3.4.1 Đại cương	155
3.4.2 Hệ quy chiếu Descartes và không gian afin con	156
3.4.3 Hệ quy chiếu Descartes và ánh xạ afin	157
<b>3.5 Tâm tỷ cự, tính lồi</b>	158
3.5.1 Tâm tỷ cự	158
3.5.2 Tính lồi	161

### Chương 4. - Đường cong trên mặt phẳng

<b>4.1 Cung tham số hóa</b>	163
4.1.1 Đại cương	163
4.1.2 Khảo sát một cung tham số hóa trong lân cận một điểm	166
4.1.3 Nhánh vô tận	174
4.1.4 Các tính đối xứng	177
4.1.5 Điểm bội	178
4.1.6 Lược đồ khảo sát một cung tham số hóa	180
4.1.7 Ví dụ về cách vẽ cung tham số hóa	181
4.1.8 Tính các diện tích phẳng	189
<b>4.2 Đường cong trọng tọa độ cực</b>	193
4.2.1 Tọa độ cực	193

4.2.2	Biểu diễn một đường cong trong tọa độ cực	194
4.2.3	Đường thẳng trong tọa độ cực	194
4.2.4	Đường tròn trong tọa độ cực	195
4.2.5	Các đường conic có tiêu điểm tại gốc tọa độ	195
4.2.6	Khảo sát một đường cong xác định bởi một phương trình cực trong lân cận một điểm	196
4.2.7	Các nhánh vô tận	197
4.2.8	Các tính chất đối xứng	199
4.2.9	Phía lõm đối với gốc tọa độ, điểm uốn	200
4.2.10	Điểm bội	202
4.2.11	Lược đồ khảo sát một đường cong cho bởi một phương trình cực	203
4.2.12	Ví dụ về cách vẽ đường cong trong tọa độ cực	204
4.2.13	Tính diện tích phẳng trong tọa độ cực	207
<b>4.3</b>	<b>Đường cong cho bằng phương trình Descartes</b>	<b>209</b>
4.3.1	Đại cương	209
4.3.2	Ví dụ	211
<b>4.4</b>	<b>Hình bao của một họ đường thẳng trong mặt phẳng</b>	<b>215</b>
4.4.1	Lý thuyết	215
4.4.2	Ví dụ	217

## Chương 5. - Các tích chất mêtric của đường cong trên mặt phẳng

<b>5.1</b>	<b>Các tính chất cấp một</b>	<b>223</b>
5.1.1	Hoành độ cong	223
5.1.2	Biểu diễn tham số theo hoành độ cong	229
<b>5.2</b>	<b>Các tính chất cấp hai</b>	<b>232</b>
5.2.1	Bán kính cong	232
5.2.2	Tâm cong	238
5.2.3	Đường túc bố của một đường cong trên mặt phẳng	243
5.2.4	Các đường thân khai của một đường cong trên mặt phẳng	247

## Chương 6. - Đường cong trong không gian và mặt cong

<b>6.1</b>	<b>Đường cong trong không gian</b>	<b>249</b>
6.1.1	Đại cương	249
6.1.2	Tiếp tuyến tại một điểm	252
6.1.3	Hoành độ cong	255
6.1.4	Khảo sát định lượng	257

<b>6.2 Mặt cong</b>	264
6.2.1 Đại cương	264
6.2.2 Tiếp diện	265
6.2.3 Các mặt thông thường	271
6.2.4 Mặt bậc hai	278
6.2.5 Mặt kẻ, mặt khả triển	286
6.2.6 Ví dụ về khảo sát các đường cong vẽ trên một mặt cong và thỏa mãn một điều kiện vi phân	291

## **Phần thứ hai - Chỉ dẫn và lời giải các bài tập**

Chương 1	303
Chương 2	321
Chương 3	385
Chương 4	397
Chương 5	451
Chương 6	469
Bảng ký hiệu	495
Bảng thuật ngữ	497



Phần thứ nhất

# **GIÁO TRÌNH**

## Chương 1

# Hình học afin trong mặt phẳng và trong không gian ba chiều

### 1.1 Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

#### 1.1.1 Nhắc lại về các $\mathbb{R}$ -kgv $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Ta sẽ xét  $\mathbb{R}^3$ , vì trường hợp  $\mathbb{R}^2$  cũng tương tự.

Ta nhắc lại (xem Tập 5, 6.1) rằng  $\mathbb{R}^3$  là một  $\mathbb{R}$ -kgv đối với các luật thông thường, được xác định, với  $(x, y, z), (x', y', z')$  thuộc  $\mathbb{R}^3$  và  $\lambda$  thuộc  $\mathbb{R}$ , bởi :

$$\begin{cases} (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \\ \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{cases}$$

và rằng :

$$\begin{cases} -(x, y, z) = (-x, -y, -z) \\ (x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z'). \end{cases}$$

$\mathbb{R}^3$  được trang bị cơ sở chính tắc  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , xác định bởi :  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Phân tử  $(0, 0, 0)$  của  $\mathbb{R}^3$  được ký hiệu là  $\vec{0}$  hoặc  $0$ .

#### 1.1.2 Các không gian afin $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$

Ta sẽ khảo sát trường hợp  $\mathbb{R}^2$ , vì trường hợp  $\mathbb{R}^3$  cũng tương tự.

Một phân tử  $(x, y)$  của  $\mathbb{R}^2$  được biểu diễn hình học bởi một điểm, ký hiệu là  $M$  chẳng hạn, mà các tọa độ là  $x, y$ .

Ta ký hiệu  $O = (0, 0) = \vec{0}$ .

Vậy, một phân tử  $(x, y)$  của  $\mathbb{R}^2$ , tùy ngữ cảnh, sẽ được xem như một vectơ, hoặc một điểm.

