ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ THU THUỶ

VỀ ĐỊNH LÍ DUBOVITSTKII-MILYUTIN VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2008

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

Lý thuyết các điều kiện tối ưu đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu hóa. Năm 1965, A. Ya. Dubovitskii và A. A. Milyutin [1] đã đưa ra lý thuyết các điều kiện cần tối ưu dưới ngôn ngữ giải tích hàm và cho ta phương pháp giải tích hàm hiệu quả để nghiên cứu các bài toán tối ưu và điều khiển. Công trình nổi tiếng của Dubovitskii-Milyutin [1] đánh dấu một bước phát triển quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa.

I. Lasiecka [4] đã tổng quát hóa các kết quả của Dubovitskii-Milyutin trên cơ sở chứng minh một mở rộng của định lý tách. Chú ý rằng các điều kiện tối ưu của định lý Dubovitskii-Milyutin dựa trên việc tách một nón chấp nhận được và một nón tiếp tuyến, trong đó nón chấp nhận được là xấp xỉ nón của tập ràng buộc bất đẳng thức và tập mức của hàm mục tiêu. Còn kết quả của Lasiecka [4] lại dựa trên tách một nón trong và một nón ngoài.

Sử dụng định lý Dubovitskii-Milyutin, Đ. V. Lưu và N. M. Hùng [5] đã thiết lập một định lý luân hồi kiểu Tucker cho hệ bao gồm các bất đẳng thức, đẳng thức và một bao hàm thức. Từ đó Lưu-Hùng [5] đã chứng minh các điều kiện cần Kuhn-Tucker với các nhân tử Lagrange dương ứng với các thành phần của hàm mục tiêu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian định chuẩn.

Luận văn trình bày các định lý Dubovitskii-Milyutin, các mở rộng của chúng và ứng dụng để dẫn các điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian định chuẩn.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các định lý của Dubovitskii-Milyutin về điều kiện tối ưu tổng quát và một số kết quả có liên quan.

Chương 2 trình bày các kết quả của Lasiecka [4] về các tổng quát hóa các điều kiện tối ưu của Dubovitskii-Milyutin trên cơ sở chứng minh một định lý tách cho một nón trong và một nón ngoài không tương giao.

Chương 3 trình bày một ứng dụng của định lý Dubovitskii-Milyutin để thiết lập một định lý luân hồi kiểu Tucker cho hệ các bất đẳng thức, đẳng thức, bao hàm thức và dẫn các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập. Chú ý rằng các nhân tử Lagrange ứng với tất cả các thành phần hàm mục tiêu ở đây là dương.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học sư phạm-Đại học Thái Nguyên cùng các thầy giáo cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp Cao học Toán K14 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái nguyên, tháng 9 năm 2008

Chương 1

ĐỊNH LÍ DUBOVITSTKII-MILYUTIN

Chương 1 trình bày định lý Dubovitskii-Milyutin (1965, [1]) và một số kết quả có liên quan trong giải tích không trơn.

1.1. CÁC KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Giả sử X là không gian tôpô tuyến tính, X^* là không gian liên hợp của X, K là một nón trong X có đỉnh tại 0, tức là $\lambda K \subset K$ $(\forall \lambda > 0)$. Khi đó nón liên hợp K^* của K được định nghĩa như sau:

$$K^* = \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0,\ \forall x \in K \right\}.$$

Mệnh đề 1.1 ([6])

Giả sử K là nón có đỉnh tại x_0, x^* *là một phiếm hàm tuyến tính và*

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq \alpha \quad \left(\forall x \in K\right).$$

Khi đó,

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq \left\langle x^*, x_0 \right\rangle \ \left(\forall x \in K\right).$$

Mệnh đề 1.2 ([6])

Hai tập lồi khác rỗng bất kì không tương giao trong không gian tôpô tuyến tính, một tập có điểm trong thì tách được.

Định lí 1.1

Giả sử K *là một nón lồi có đỉnh tại 0,* $intK \neq \emptyset$*,* L *là một không gian con,* $intK \cap L \neq \emptyset$*. Giả sử* x^* *là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L thỏa mãn*

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall x \in K \cap L\right).$$

Khi đó, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $\tilde{x}^*$ *trên X sao cho*

$$\left\langle \tilde{x}^*, x \right\rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle \ \left(\forall x \in L\right),$$

$$\left\langle \tilde{x}^*, x \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall x \in K\right).$$

Chứng minh

(a) Nếu $x^* = 0$ trên L, thì ta chọn $\tilde{x}^* = 0$.

(b) Nếu $x^* \neq 0$, ta đặt

$$Q_1 := \left\{ x \in L : \left\langle x^*, x \right\rangle = 0 \right\}.$$

Khi đó, Q_1 lồi và khác $\emptyset$ (bởi vì $0 \in Q_1$). Đồng thời

$$Q_1 \cap \left(intK\right) = \emptyset.$$

Thật vậy, nếu

$$Q_1 \cap \left(intK\right) \neq \emptyset.$$

$\Rightarrow$ $\exists x_0 \in Q_1 \cap \left(intK\right)$.

$\Rightarrow$ $x_0 \in L, \left\langle x^*, x_0 \right\rangle = 0$.

Bởi vì $x_0 \in L \cap intK$, cho nên trong lân cận của điểm x_0 ta tìm được điểm $x_1 \in L \cap K$ mà $\left\langle x^*, x_1 \right\rangle < 0$. Điều đó mâu thuẫn với tính không âm của $\left\langle x^*, x \right\rangle$ trên $L \cap K$. Vì vậy,

$$Q_1 \cap (intK) = \varnothing.$$

Do đó, tồn tại siêu phẳng tách Q_1 và $intK$, tức là tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $\xi \in X^*$ sao cho

$$\langle \xi, x \rangle > 0 \quad (\forall x \in intK), \tag{1.1}$$

$$\langle \xi, x \rangle = 0 \quad (\forall x \in Q_1). \tag{1.2}$$

Để chứng minh tiếp định lý, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1.1

Giả sử $\xi_1, \xi_2 \in X^*$,

$$Q_1 := \{ x : \langle \xi_1, x \rangle = 0 \},$$

$$Q_2 := \{ x : \langle \xi_2, x \rangle = 0 \},$$

và $Q_1 \subset Q_2$. *Khi đó, hoặc* $\xi_2 = 0$ *(tức là* $Q_2 = X$ *) hoặc* $\xi_1 = \lambda \xi_2, \lambda \neq 0$ *(tức là* $Q_1 = Q_2$*).*

Bây giờ trên không gian con L ta xét hai phiếm hàm tuyến tính liên tục x^* và ξ. Xét các tập hợp:

$$Q_1 := \left\{ x \in L : \left\langle x^*, x \right\rangle = 0 \right\},$$

$$Q_2 := \{ x \in L : \langle \xi, x \rangle = 0 \}.$$

Ta có $Q_1 \subset Q_2$(do (1.2)). Áp dụng bổ đề 1.1, ta nhận được hai trường hợp:

(i) Hoặc $Q_1 = Q_2$,

(ii) Hoặc $Q_2 = L$.

Trường hợp (ii) không thể xảy ra, bởi vì từ (1.1) ta có $\langle \xi, x \rangle > 0$, nếu

$$x \in L \cap intK.$$

Vì vậy, theo bổ đề 1.1

$$\langle x^*, x \rangle = \lambda \langle \xi, x \rangle \ (\lambda \neq 0)$$

trên L. Bởi vì $\langle x^*, x \rangle$ và $\langle \xi, x \rangle$ cùng dấu trên $K \cap L$, cho nên $\lambda > 0$. Khi đó, $\tilde{x}^* = \lambda \xi$ là thác triển cần tìm của x^*. □

Mệnh đề 1.3 ([6])

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \right)^* \supset \sum_{\alpha \in I} K_\alpha^*.$$

1.2. ĐỊNH LÝ DUBOVITSKII-MILYUTIN

Định lý 1.2.

Giả sử $K_1, K_2, \ldots, K_n$ *là các nón lồi mở (đỉnh tại 0),* $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$. *Khi đó,*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Chứng minh

Xét không gian tích $\tilde{X} = X \times \ldots \times X = X^n$. Mỗi điểm $\tilde{x} \in \tilde{X}$ có dạng:

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in X;$$

$\tilde{X}^* = X^* \times \ldots \times X^*;\ \tilde{\zeta} \in \tilde{X}^*$ có dạng:

$$\tilde{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n),\ \zeta_i \in X^*;$$

$$\langle \tilde{\zeta}, \tilde{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta_i, x_i \rangle.$$

Đặt

$$\tilde{K} := \{\ \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n):\ x_i \in K_i,\ i = 1, \ldots, n\ \}.$$

Ta có $\tilde{K}$ là một nón lồi mở trong $\tilde{X}$, bởi vì $\tilde{K}$ là tích của các nón lồi mở K_i.

Đặt

$$\tilde{L} := \{\ \tilde{x} = (x, \ldots, x):\ x \in X\ \}.$$

Ta có $\tilde{L}$ là không gian con tuyến tính của $\tilde{X}$. Bởi vì $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$, cho nên

$$\tilde{L} \cap \tilde{K} \neq \varnothing.$$

Bây giờ ta lấy $x^* \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^*$. Ta sẽ chứng minh

$$x^* \in \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Đặt

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle = \langle x^*, x \rangle,$$

trong đó

$$x \in X,\ \tilde{x} = (x, \ldots, x) \in \tilde{L}.$$

Khi đó, ξ là một phiếm hàm tuyến tính trên $\tilde{L}$. Ta có

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle \geq 0 \; \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{L} \cap \tilde{K} \right),$$

bởi vì

$$\tilde{x} = (x, \ldots, x) \in \tilde{L} \cap \tilde{K}.$$

$$\Rightarrow \qquad x \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i.$$

$$\Rightarrow \qquad \langle \xi, \tilde{x} \rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0.$$

Áp dụng định lý 1.1, tồn tại $\tilde{\xi} \in \tilde{X}^*$ sao cho

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle \geq 0 \; \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{K} \right), \tag{1.3}$$

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle = \langle \xi, \tilde{x} \rangle \; \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{L} \right). \tag{1.4}$$

Giả sử $\tilde{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Khi đó, với mọi $x \in X$, thì $\tilde{x} = (x, \ldots, x) \in \tilde{L}$ và từ (1.4) ta có

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \xi_i, x \rangle = \langle \xi, \tilde{x} \rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle.$$

$$\Rightarrow \qquad x^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Từ (1.3), ta suy ra