ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VI DIỆU MINH

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn: PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - 2008

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết điều khiển toán học là một trong những lĩnh vực toán học ứng dụng quan trọng mới được phát triển khoảng 50 năm trở lại đây. Công cụ chính của lý thuyết điều khiển toán học là những mô hình và các phương pháp toán học giải quyết những vấn đề định tính và giải số các hệ thống điều khiển. Rất nhiều bài toán trong khoa học, công nghệ, kỹ thuật và kinh tế được mô tả bởi các hệ phương trình vi phân chứa tham số điều khiển và cần đến những công cụ toán học để tìm ra lời giải.

Một trong những vấn đề đầu tiên và quan trọng nhất trong lý thuyết điều khiển hệ thống là lý thuyết điều khiển được, tức là tìm một chiến lược điều khiển sao cho có thể chuyển hệ thống từ một trạng thái này sang một trạng thái khác. Bài toán điều khiển được liên quan chặt chẽ đến các bài toán khác như bài toán tồn tại điều khiển tối ưu, bài toán ổn định và ổn định hóa, bài toán quan sát được,…

Mặc dù lý thuyết điều khiển đã được hình thành cách đây khoảng 50 năm, nhưng nhiều bài toán và vấn đề về điều khiển như: điều khiển được hệ phương trình vi phân ẩn tuyến tính dừng và không dừng có hạn chế trên biến điều khiển, điều khiển được hệ phương trình vi phân và sai phân ẩn tuyến tính có chậm, những bài toán liên quan giữa điều khiển được, quan sát được và ổn định hoá, …, hiện nay vẫn còn mang tính thời sự và được rất nhiều nhà toán học trên thế giới cũng như trong nước quan tâm.

Phương trình vi phân thường đã được nghiên cứu từ rất lâu, khoảng 200 năm trở lại đây. Tuy nhiên lý thuyết phương trình vi phân ẩn, trong đó có phương trình vi phân đại số tuyến tính lại mới được thật sự quan tâm trong vòng 40 năm trở lại đây. Phương trình vi phân đại số tuyến tính có rất nhiều điểm đặc biệt mà ta không thể tìm thấy ở phương trình vi phân thường, ví dụ: ma trận hệ số là ma trận suy biến, không có tính chất "nhân quả" giữa đầu vào và đầu ra,…, làm cho việc nghiên cứu những vấn đề liên quan trở nên phức tạp nhưng lại rất hấp dẫn. Hiện nay, mặc dù đã có nhiều cố gắng khảo sát những tính chất đặc biệt ấy, nhưng việc nghiên cứu hệ phương trình vi phân suy biến vẫn còn là thời sự, bởi còn rất nhiều câu hỏi chưa được giải đáp.

Mục đích của luận văn này là trình bày các kết quả mở rộng tiêu chuẩn điều khiển được của các hệ điều khiển mô tả bởi phương trình vi phân thường – tiêu chuẩn Kalman – cho hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính dừng và không dừng. Luận văn cố gắng trình bày một cách có hệ thống từ đơn giản đến phức tạp, từ phương trình vi phân đại số tuyến tính dừng đến phương trình vi phân đại số tuyến tính không dừng. Tiêu chuẩn điều khiển được dạng Kalman được đặc trưng thông qua tiêu chuẩn về hạng của ma trận hệ số. Thống nhất đi theo hướng nghiên cứu đó, trước tiên luận văn trình bày tiêu chuẩn điều khiển được mở rộng cho hệ phương trình vi phân đại số thông qua ma trận hệ số của các hệ phương trình vi phân ẩn tuyến tính dừng và sau đó là cho hệ mô tả bởi hệ phương trình vi phân ẩn tuyến tính không dừng. Các tiêu chuẩn điều khiển được này nói chung phức tạp hơn rất nhiều so với tiêu chuẩn Kalman.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1 nghiên cứu hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số hằng.

Mục 1 chương 1 trình bày hai cách tiếp cận hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính nhằm nghiên cứu tính chất tập nghiệm của phương trình dạng

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

trong đó E là ma trận nói chung suy biến.

Cách tiếp cận thứ nhất là thông qua cặp ma trận chính quy để đưa phương trình trên về hệ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u_1(t); \\ N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u_2(t), t \ge 0, \end{cases}$$

trong đó phương trình thứ nhất là phương trình vi phân thường và phương trình thứ hai là phương trình vi phân với ma trận lũy linh.

Cách tiếp cận thứ hai nhằm nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm của phương trình vi phân với hệ số hằng thông qua ma trận cơ sở. Mục này giới thiệu khái niệm toán tử hiệu chỉnh, nghiệm của phương trình vi phân đại số được tìm thông qua toán tử hiệu chỉnh . Công thức nghiệm này cho thấy rõ hơn sự khác biệt của phương trình vi phân suy biến so với phương trình vi phân thường, ngoài ra việc tìm ra cấu trúc tập nghiệm còn nhằm áp dụng vào việc nghiên cứu tính điều khiển được của hệ phương trình vi phân tuyến tính được trình bày ở mục 2.

Mục 2 trình bày tính điều khiển được của hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số hằng theo [6], trong đó tiêu chuẩn điều khiển được là mở rộng của tiêu chuẩn hạng Kalman.

Chương 2 nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm và tính điều khiển được của hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính có hệ số biến thiên.

Mục 1 của chương 2 trình bày tính giải được của phương trình vi phân tuyến tính không dừng theo cuốn sách [7]. Bằng cách tác động toán tử hiệu chỉnh trái vào phương trình vi phân ẩn, ta có thể đưa phương trình từ phức tạp về đơn giản để dễ nghiên cứu hơn.

Mục 2 của chương 2 trình bày tính điều khiển được hệ phương trình vi phân đại số với hệ số biến thiên theo [9]. Thống nhất với mục 1, mục 2 cũng dùng toán tử hiệu chỉnh trái để đưa việc nghiên cứu tiêu chuẩn điều khiển được hệ suy biến không dừng về nghiên cứu hệ đơn giản hơn.

Mặc dù luận văn chủ yếu là trình bày lại các kết quả trong [6], [7], [8], [9], nhưng chúng tôi cố gắng thể hiện những lao động của mình trong quá trình đọc, nghiên cứu và mở rộng các kết quả ấy cho hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính. Thí dụ: Mục 1.1 chương 1 trình bày công thức nghiệm tường minh của phương trình vi phân tuyến tính không dừng với ma trận luỹ linh là kết quả của tác giả, đã được báo cáo tại Hội nghị nghiên cứu khoa học sau đại học do Đại học Sư phạm Thái Nguyên tổ chức (Thái Nguyên, tháng 7-2008) và được đăng trong [3]. Chúng tôi cũng cố gắng chi tiết hóa hoặc tìm ra những cách chứng minh khác với cách chứng minh trong [6], [7], [8], [9]. Trong toàn bộ luận văn, chúng tôi cố gắng diễn giải những định lý, bổ đề một cách dễ hiểu nhất. Chúng tôi hy vọng rằng, luận văn cho thấy rõ hơn sự phát triển trong nghiên cứu tiêu chuẩn điều khiển được hệ phương trình vi phân từ đơn giản đến phức tạp, từ phương trình vi phân thường đến phương trình vi phân ẩn suy biến với hệ số biến thiên.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS – TS Tạ Duy Phượng. Xin được tỏ lòng cám ơn chân thành nhất tới Thầy.

Tác giả xin cám ơn chân thành tới Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, nơi tác giả đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.

Và cuối cùng, xin cám ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học Cao học và viết luận văn.

Thái Nguyên, ngày 18 tháng 9 năm 2008

Tác giả

Vi Diệu Minh

Chương 1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

§1 TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VỚI HỆ SỐ HẰNG

1.1 **Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với ma trận lũy linh**

Xét phương trình vi phân đại số tuyến tính dạng

$$N\dot{x}(t) = x(t) + B(t)u(t),\ \ t \geq 0, \tag{1.1.1.1}$$

trong đó N là ma trận vuông cấp n_2, không phụ thuộc vào t và là ma trận lũy linh bậc h, tức là $N^h = 0_{n_2}$ với 0_{n_2} là ma trận vuông cấp n_2 có tất cả các thành phần bằng 0; $x(t)$ là một hàm khả vi hầu khắp nơi nhận giá trị trong không gian $\mathbb{R}^{n_2}$ và thỏa mãn phương trình (1.1.1.1) hầu khắp nơi (là nghiệm của phương trình vi phân (1.1.1.1)); $B(t)$ là ma trận cấp $n_2 \times m$ và $u(t)$ là vectơ hàm m chiều. Trước tiên ta chứng minh Bổ đề sau (xem [3]).

Bổ đề 1.1

Giả sử $B(t)$ và $u(t)$ tương ứng là ma trận hàm và vectơ hàm có các thành phần là các hàm khả vi liên tục đến cấp h, trong đó h là bậc của ma trận lũy linh N. Khi ấy với mọi $1 \leq k \leq h$ ta có

$$N^k x^{(k)}(t) = N^{k-1}x^{(k-1)}(t) + N^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} B^{(k-1-i)}(t)u^{(i)}(t), \tag{1.1.1.2}$$

trong đó $x^{(k)}(t)$ là đạo hàm cấp k của vectơ hàm $x(t)$, tương tự, $u^{(i)}(t)$ là đạo hàm cấp i của vectơ hàm $u(t)$, còn $B^{(s)}(t)$ là đạo hàm cấp s của ma trận hàm $B(t)$, $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ với $0 \leq i \leq k$.

Chứng minh

Nhân phương trình (1.1.1.1) với ma trận N rồi lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$N^2\ddot{x}(t) = N\dot{x}(t) + N\left[\dot{B}(t)u(t) + B(t)\dot{u}(t)\right].$$

Lại tiếp tục nhân phương trình này với N rồi lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$N^3\dddot{x}(t) = N^2\ddot{x}(t) + N^2\left[\ddot{B}(t)u(t) + \dot{B}(t)\dot{u}(t) + \dot{B}(t)\dot{u}(t) + B(t)\ddot{u}(t)\right]$$

$$= N^2\ddot{x}(t) + N^2\sum_{i=0}^{2} C_2^i B^{(2-i)}(t)u^{(i)}(t).$$

Như vậy, công thức (1.1.1.2) đúng với $s = 1, 2, 3$.

Giả sử công thức (1.1.1.2) đúng với mọi $s \le k < h$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $s = k + 1$. Thật vậy, theo qui nạp ta có

$$N^k x^{(k)}(t) = N^{k-1}x^{(k-1)}(t) + N^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i B^{(k-1-i)}(t)u^{(i)}(t).$$

Nhân phương trình này với N rồi lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$N^{k+1}x^{(k+1)}(t) = N^k x^{(k)}(t) + N^k\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i\left[B^{(k-i)}(t)u^{(i)}(t) + B^{(k-1-i)}(t)u^{(i+1)}(t)\right]$$

$$= N^k x^{(k)}(t) + N^k C_{k-1}^0 B^{(k)}(t)u(t) + N^k C_{k-1}^0 B^{(k-1)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+ N^k C_{k-1}^1 B^{(k-1)}(t)\dot{u}(t) + N^k C_{k-1}^1 B^{(k-2)}(t)\ddot{u}(t) + N^k C_{k-1}^2 B^{(k-2)}(t)\ddot{u}(t)$$

$$+ N^k C_{k-1}^2 B^{(k-3)}(t)\dddot{u}(t) + \ldots + N^k C_{k-1}^{s-1} B^{(k-s+1)}(t)u^{(s-1)}(t) + N^k C_{k-1}^{s-1} B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t)$$

$$+ N^k C_{k-1}^s B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t) + N^k C_{k-1}^s B^{(k-1-s)}(t)u^{(s+1)}(t)$$

$$+ \ldots + N^k C_{k-1}^{k-2} B^{(2)}(t)u^{(k-2)}(t) + N^k C_{k-1}^{k-2}\dot{B}(t)u^{(k-1)}(t)$$

$$+ N^k C_{k-1}^{k-1}\dot{B}(t)u^{(k-1)}(t) + N^k C_{k-1}^{k-1} B(t)u^{(k)}(t)$$

$$= N^k x^{(k)}(t) + N^k C_{k-1}^0 B^{(k)}(t)u(t) + N^k\left(C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1\right)B^{(k-1)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+ N^k\left(C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2\right)B^{(k-2)}(t)\ddot{u}(t) + \ldots + N^k\left(C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^s\right)B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t)$$

$$+ \ldots + N^k\left(C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}^{k-1}\right)\dot{B}(t)u^{(k-1)}(t) + N^k C_{k-1}^{k-1} B(t)u^{(k)}(t).$$

Nhưng $C_{k-1}^i = \dfrac{(k-1)!}{i!(k-1-i)!}$ nên

$$C_{k-1}^0 = 1 = C_k^0;\ C_{k-1}^{k-1} = 1 = C_k^k$$

và

$$C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^s = C_k^s$$

nên

$$N^{k+1}x^{(k+1)}(t) =$$

$$= N^k x^{(k)}(t) + N^k C_{k-1}^0 B^{(k)}(t)u(t) + N^k \; C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1 \; B^{(k-1)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+N^k \; C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2 \; B^{(k-2)}(t)\ddot{u}(t) + \ldots + N^k \; C_{k-1}^{s-1} + C_{k-1}^s \; B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t)$$

$$+\ldots + N^k \; C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}^{k-1} \; \dot{B}(t)u^{(k-1)}(t) + N^k C_{k-1}^{k-1} B(t)u^{(k)}(t)$$

$$= N^k x^{(k)}(t) + N^k C_k^0 B^{(k)}(t)u(t) + N^k C_k^1 B^{(k-1)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+N^k C_k^2 B^{(k-2)}(t)\ddot{u}(t) + \ldots + N^k C_k^s B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t)$$

$$+\ldots + N^k C_k^{k-1}\dot{B}(t)u^{(k-1)}(t) + N^k C_k^k B(t)u^{(k)}(t)$$

$$= N^k x^{(k)}(t) + N^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s B^{(k-s)}(t)u^{(s)}(t).$$

Vậy theo nguyên lý qui nạp, công thức (1.1.1.2) được chứng minh.

Từ Bổ đề 1.1 ta có công thức nghiệm sau đây của hệ (1.1.1.1).

Mệnh đề 1.1 ([3])

Giả sử $B(t)$ là ma trận hàm và $u(t)$ vectơ hàm có các thành phần là các hàm khả vi liên tục đến cấp h. Khi ấy nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính suy biến (1.1.1.1) được tính theo công thức

$$x(t) = \sum_{k=0}^{h-1} F_k(t)u^{(k)}(t), \qquad (1.1.1.3)$$

trong đó $F_k(t) = -\sum_{s=k}^{h-1} N^s C_s^k B^{(s-k)}(t)$.

Chứng minh

Viết lại (1.1.1.2) với $k = 1,2,\ldots,h$ ta được

$$N\dot{x}(t) = x(t) + C_0^0 B(t)u(t);$$

$$N^2\ddot{x}(t) = N\dot{x}(t) + NC_1^0\dot{B}(t)u(t) + NC_1^1 B(t)\dot{u}(t);$$

$$N^3\dddot{x}(t) = N^2\ddot{x}(t) + N^2C_2^0\ddot{B}(t)u(t) + N^2C_2^1\dot{B}(t)\dot{u}(t) + N^2C_2^2 B(t)\ddot{u}(t);$$

....

$$N^k x^{(k)}(t) = N^{k-1}x^{(k-1)}(t) + N^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} B^{(k-1-i)}(t)u^{(i)}(t)$$

$$= N^{k-1}x^{(k-1)}(t) + N^{k-1}C_{k-1}^{0}B^{(k-1)}(t)u(t) + N^{k-1}C_{k-1}^{1}B^{(k-2)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+ ... + N^{k-1}C_{k-1}^{i}B^{(k-1-i)}(t)u^{(i)}(t) + ... + N^{k-1}C_{k-1}^{k-1}B(t)u^{(k-1)}(t).$$

....

$$N^h x^{(h)}(t) = N^{h-1}x^{(h-1)}(t) + N^{h-1}\sum_{i=0}^{h-1} C_{h-1}^{i} B^{(h-1-i)}(t)u^{(i)}(t)$$

$$= N^{h-1}x^{(h-1)}(t) + N^{h-1}C_{h-1}^{0}B^{(h-1)}(t)u(t) + N^{h-1}C_{h-1}^{1}B^{(h-2)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+ ... + N^{h-1}C_{h-1}^{i}B^{(h-1-i)}(t)u^{(i)}(t) + N^{h-1}C_{h-1}^{h-1}B(t)u^{(h-1)}(t).$$

Cộng vế với vế các đẳng thức này và để ý đến tính chất lũy linh của ma trận N, tức là $N^h = 0$, sau khi nhóm các số hạng ở hai vế, ta được

$$0 = x(t) + \sum_{s=0}^{h-1} N^s C_s^0 B^{(s)}(t)u(t) + \sum_{s=1}^{h-1} N^s C_s^1 B^{(s-1)}(t)\dot{u}(t)$$

$$+ ... + \sum_{s=k}^{h-1} N^s C_s^k B^{(s-k)}(t)u^{(k)}(t) + ... + N^{h-1}B(t)u^{(h-1)}(t)$$

$$= x(t) - \sum_{k=0}^{h-1} F_k(t)u^{(k)}(t).$$

Từ đây suy ra $x(t) = \sum_{k=0}^{h-1} F_k(t)u^{(k)}(t).$

Vậy Mệnh đề 1.1 được chứng minh.

Trong trường hợp $B(t) \equiv B$ là ma trận hằng ta có

Hệ quả 1.1 ([6], trang 17)

Giả sử $B(t) \equiv B$ là ma trận hằng và $u(t)$ vectơ hàm có các thành phần là các hàm khả vi liên tục đến cấp h. Khi ấy nghiệm của phương trình

$$N\dot{x}(t) = x(t) + Bu(t) \qquad (1.1.1.4)$$

được tính theo công thức

$$x(t) = -\sum_{k=0}^{h-1} N^k B u^{(k)}(t). \qquad (1.1.1.5)$$