BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN DƯƠNG TOÀN

PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN KHÔNG CỔ ĐIỂN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2015

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

*

NGUYỄN DƯƠNG TOÀN

PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN KHÔNG CỔ ĐIỂN

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân
Mã số: 62 46 01 03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Cung Thế Anh

HÀ NỘI - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Những kết quả viết chung với các tác giả khác, đều đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Những kết quả nêu trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình khoa học nào.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Dương Toàn

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được thực hiện tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, dưới sự hướng dẫn nghiêm khắc, tận tình, chu đáo của PGS. TS. Cung Thế Anh. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy, người đã dẫn dắt tác giả vào một hướng nghiên cứu tuy khó khăn, vất vả nhưng thực sự thú vị và có ý nghĩa.

Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu, Phòng Sau Đại học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là PGS.TS. Trần Đình Kế và các thầy giáo, cô giáo trong Bộ môn Giải tích đã luôn giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi và động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám hiệu trường Đại học Hải Phòng, Khoa Toán, nơi tác giả công tác đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả hoàn thành nhiệm vụ học tập và nghiên cứu. Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các anh chị NCS chuyên ngành Phương trình vi phân và tích phân của Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, các bạn bè lời cảm ơn chân thành về tất cả những giúp đỡ, động viên mà tác giả đã nhận được trong suốt thời gian qua.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn ở bên chia sẻ, động viên tác giả vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành luận án.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ Euclide N-chiều
Ω_r	tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với mỗi $r \in \mathbb{R}$
$(\cdot,\cdot), \|\cdot\|$	tích vô hướng và chuẩn trong không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$
H_r	kí hiệu của không gian $L^2(\Omega_r)$ có tích vô hướng $(.,.)_r$ và chuẩn $\|.\|_r$, ứng với mỗi $r \in \mathbb{R}$
V_r	kí hiệu của không gian $H_0^1(\Omega_r)$ có tích vô hướng $((.,.))$ và chuẩn $\|.\|_r$, ứng với mỗi $r \in \mathbb{R}$
H_r^*	đối ngẫu của H_r
$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$	chuẩn trong không gian $L^p(\mathbb{R}^N)$, với $1 \leq p \leq \infty$
$\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$	chuẩn trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N)$
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	đối ngẫu giữa X và X'
Id	ánh xạ đồng nhất
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu
$\overline{Y}^X$	bao đóng của Y trong X
$\mathcal{B}(X)$	họ các tập con bị chặn của X
$\operatorname{dist}(A,B)$	nửa khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B
P_m	phép chiếu lên không gian con sinh bởi m vectơ riêng đầu tiên của toán tử A

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Phương trình đạo hàm riêng được nghiên cứu lần đầu vào giữa thế kỷ XVIII và được phát triển mạnh mẽ từ giữa thế kỷ XIX cho đến nay. Nó được coi là chiếc cầu nối giữa toán học và ứng dụng. Rất nhiều phương trình đạo hàm riêng là mô hình toán của các bài toán thực tế. Đặc biệt là lớp phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến, lớp phương trình này xuất hiện trong nhiều quá trình của vật lí, hóa học và sinh học, chẳng hạn quá trình truyền nhiệt, quá trình khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các mô hình quần thể trong sinh học ... Vì vậy, nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ.

Vấn đề đầu tiên đặt ra khi nghiên cứu những lớp phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến là xét tính đặt đúng của bài toán (bởi như V.P. Maslov đã từng nhấn mạnh rằng, một phương trình đạo hàm riêng có ý nghĩa thực tiễn thì chắc chắn sẽ có nghiệm, vấn đề là trong lớp nghiệm nào mà thôi), và sau đó một vấn đề quan trọng đặt ra là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng. Đây là một việc làm có ý nghĩa thực tiễn, vì nghiệm của phương trình đạo hàm riêng thường mô tả trạng thái của các mô hình thực tế. Do đó, khi biết dáng điệu nghiệm, ta có thể dự đoán được xu thế phát triển của hệ trong tương lai và từ đó đưa ra những đánh giá, điều chỉnh thích hợp.

Một lớp phương trình đạo hàm riêng tiến hóa phi tuyến quan trọng được nghiên cứu nhiều trong những năm gần đây là lớp phương trình khuếch tán không cổ điển có dạng:

$$u_t - \varepsilon\Delta u_t - \Delta u + f(u) = g, \text{ với } \varepsilon \in (0,1], \tag{1}$$

ở đó f là hàm phi tuyến và g là hàm ngoại lực. Chú ý rằng khi $\varepsilon = 0$, phương trình khuếch tán không cổ điển trở thành phương trình phản ứng-khuếch tán cổ điển quen thuộc.

Lớp phương trình khuếch tán không cổ điển được giới thiệu trong [1] khi E.C. Aifantis chỉ ra rằng phương trình phản ứng-khuếch tán cổ điển không mô tả được hết các khía cạnh của bài toán phản ứng-khuếch tán. Nó bỏ qua tính nhớt, sự đàn hồi, và áp suất của môi trường trong quá trình khuếch tán chất rắn. Hơn nữa, E.C. Aifantis cũng chỉ ra rằng, năng lượng từ phương trình phát ra trong quá trình khuếch tán chất rắn trong môi trường khác nhau sẽ có tính chất khác nhau. Ví dụ, năng lượng phát ra từ phương trình khi môi trường truyền dẫn có áp suất và có độ nhớt hay không có độ nhớt là khác nhau. Do đó, ông đã xây dựng mô hình toán học qua một số ví dụ cụ thể, trong đó có chứa tính dẻo, đàn hồi, với áp lực trung bình và đưa ra lớp phương trình khuếch tán không cổ điển. Lớp phương trình này thường sử dụng để mô tả các hiện tượng vật lí như dòng chảy không Newton, các hiện tượng trong cơ học chất lỏng, cơ học chất rắn và sự tỏa nhiệt (xem [1, 22, 23, 29, 38, 39]). Gần đây, E.C. Aifantis đã đưa thêm một mô hình mới về bài toán này, xin xem trong [2].

Từ khi ra đời cho đến nay, sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận nghiệm của lớp phương trình khuếch tán không cổ điển có dạng (1) đã được nghiên cứu trong nhiều trường hợp khác nhau (xin xem chi tiết trong phần Tổng quan vấn đề nghiên cứu dưới đây). Tuy nhiên, những kết quả trong trường hợp miền không bị chặn hoặc miền không trụ, với ngoại lực phụ thuộc thời gian, vẫn còn ít do tính phức tạp của vấn đề và những khó khăn lớn xuất hiện khi nghiên cứu. Chúng tôi sẽ chọn vấn đề này làm đề tài luận án tiến sĩ của mình.