TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG VĂN TRỌNG

NHỮNG BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ CÁC ĐƯỜNG CONIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG VĂN TRỌNG

NHỮNG BÀI TOÁN TỔNG HỢP VỀ CÁC ĐƯỜNG CONIC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời nói đầu

Những bài toán về các đường conic là một phần thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng, các đề thi olympic quốc gia và quốc tế. Hiện nay cũng đã có khá nhiều tài liệu tham khảo viết về các bài toán liên quan đến đường conic. Tuy nhiên, các tài liệu đó đa phần mới chỉ nêu ra các dạng bài tập rời rạc hoặc với các trường hợp áp dụng cho số cụ thể mà chưa nêu ra các bài toán mang tính tổng quát, tổng hợp. Chính vì điều đó đã thôi thúc tác giả nghiên cứu đề tài "**Những bài toán tổng hợp về các đường conic**". Hy vọng luận văn sẽ góp phần giúp cho các học sinh và các thầy cô giáo trung học phổ thông có cái nhìn tổng quát, cô đọng về các vấn đề liên quan đến đường conic thông qua các bài toán tổng hợp.

Ngoài phần lời nói đầu, luận văn gồm hai chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày kiến thức về các đường bậc hai, làm cơ sở để sử dụng trong chương sau.

Chương 2 dành để trình bày các bài toán tổng hợp về các đường conic, đây là những bài toán tổng quát làm nền tảng ứng dụng tốt cho những bài toán với số cụ thể, cho cách nhìn bao quát, tổng hợp về các đường conic.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS Nguyễn Minh Khoa. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy. Xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán trường Đại học Khoa học (Đại học Thái Nguyên), các thầy giáo, cô giáo đã trang bị kiến thức và tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập. Cuối cùng cũng xin gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu và các đồng nghiệp ở trường THCS và THPT Chu Văn An, thành phố Móng Cái, Quảng Ninh đã động viên, giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Tác giả

Hoàng Văn Trọng

Mục lục

Chương 1

Các đường bậc hai

Trong chương này, tác giả trình bày một số khái niệm và kết quả về các đường bậc hai.

1.1. Đường tròn

1.1.1. Định nghĩa

Đường tròn là tập hợp những điểm cách đều một điểm cố định cho trước một khoảng không đổi. Điểm cố định gọi là tâm của đường tròn, khoảng không đổi gọi là bán kính của đường tròn.

1.1.2. Phương trình chính tắc của đường tròn

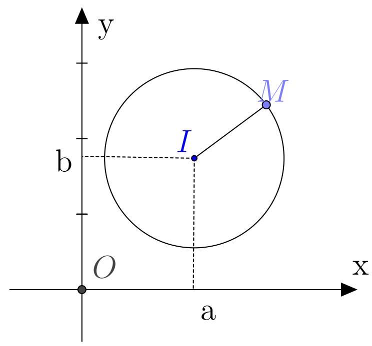
Ta lập phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R: Điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn khi và chỉ khi:

$$IM = R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{1.1}$$

Ta có (1.1) là phương trình chính tắc của đường tròn.

Ví dụ 1.1. Phương trình đường tròn tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R = 2$ là:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$



Hình 1.1:

Nhận xét 1.2.

- Nếu $a = 0, b = 0$ ta có: $x^2 + y^2 = R^2$ là phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính R.

- Khai triển (1.1) ta được phương trình

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0. \tag{1.2}$$

  Ta thấy (1.2) là phương trình bậc hai đối với x, y, trong đó các hệ số của x^2, y^2 bằng nhau, không có số hạng chéo xy. Ngược lại phương trình bậc hai dạng (1.2) biểu diễn một quỹ tích nào đó thì đó là đường tròn.

Ví dụ 1.3. Phương trình

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 12 = 0,$$

có đặc điểm như đã nhận xét. Bởi vì phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1.$$

Đây là phương trình của đường tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 1$.

1.2. Đường elip

1.2.1. Định nghĩa

Elip là tập hợp những điểm mà tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F_1, F_2 bằng một hằng số $2a$ lớn hơn khoảng cách giữa hai điểm F_1, F_2.
Hai điểm F_1, F_2 được gọi là tiêu điểm của elip. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

1.2.2. Thuật toán xây dựng phương trình chính tắc của elip

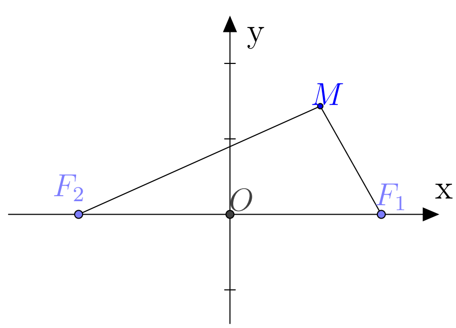
Nhận xét 1.4.

1) Điểm M trong mặt phẳng thuộc elip thì:

$$MF_1 + MF_2 = 2a, \tag{1.3}$$

trong đó $a > c > 0$.

2) Từ định nghĩa ta thấy elip nhận các đường thẳng đi qua F_1F_2 và đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2 làm trục đối xứng.



Hình 1.2

Để cho phương trình của elip được đơn giản, ta chọn hệ tọa độ Đề các Oxy với:
Ox là trục đi qua F_1, F_2 hướng từ F_2 đến F_1, Oy là đường trung trực của F_1F_2, gốc tọa độ O là trung điểm của đoạn F_1F_2.

Khi đó các điểm có tọa độ là: $O(0;0), F_2(-c;0), F_1(c;0)$. Điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy suy ra

$$MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Vậy đẳng thức (1.3) trở thành

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Bình phương hai vế, ta có

x$^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx + a^2.$

Tiếp tục bình phương hai vế ta được

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Vì $a > c \Longrightarrow a^2 - c^2 > 0$. Đặt $a^2 - c^2 = b^2$, ta có:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.2.2)$$

Ta có (1.2.2) là phương trình chính tắc của elip.

1.2.3. Dạng đồ thị của elip

Từ phương trình (1.2.2) của elip ta thấy nếu điểm $M(x;y)$ thuộc elip thì các điểm $M_1(x;-y), M_2(-x;y), M_3(-x;-y)$ cũng thuộc elip. Điều này có nghĩa là đường elip nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng, nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Tương giao của elip với các trục tọa độ:

Cho $y = 0$, từ (1.2.2) $\Longrightarrow x = \pm a$. Vậy elip cắt trục Ox tại hai điểm $A_2(-a;0), A_1(a;0)$.

Cho $x = 0$, từ (1.2.2) $\Longrightarrow y = \pm b$. Vậy elip cắt trục Oy tại hai điểm $B_1(0;b), B_2(0;-b)$.

Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 gọi là các đỉnh của elip. Đoạn thẳng A_1A_2 với độ dài $2a$ được gọi là trục lớn của elip. Đoạn thẳng B_1B_2 với độ dài $2b$ gọi là trục nhỏ.

Ta gọi a là bán trục lớn, b là bán trục nhỏ. Gốc tọa độ $O(0;0)$ gọi là tâm của elip.