ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

BÙI THỊ MAI

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ MAI

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu

Toán học là một môn học quan trọng trong chương trình phổ thông. Việc giảng dạy và học tập môn toán trong trường phổ thông không những nhằm trang bị cho học sinh những kiến thức cụ thể để áp dụng trong cuộc sống cũng như trong các môn học khác mà điều quan trong hơn là cung cấp và rèn luyện cho học sinh những kĩ năng, phương pháp môn học một cách tư duy của Toán học, điều cần thiết cho học sinh trong cả cuộc đời.

Chuyên đề về phương trình, bất phương trình và hệ đại số có vị trí rất đặc biệt trong toán học, không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực của giải tích, hình học, lượng giác và ứng dụng.

Trong các kỳ thi thi học sinh giỏi Toán quốc gia, tuyển sinh Đại học, Cao đẳng và Olympic Toán sinh viên thì các bài toán liên quan đến giải hệ phương trình cũng hay được đề cập và được xem như là những dạng toán thuộc loại khó. Các bài toán liên quan đến hệ phương trình nằm trong chương trình chính thức của Toán đại số và giải tích ở bậc trung học phổ thông.

Mặc dù trong quá trình giảng dạy, giáo viên và học sinh đã được cọ sát rất nhiều nhưng khi gặp bài toán giải hệ phương trình trong các đề thi các em học sinh thường thấy lúng túng trong quá trình tìm ra cách giải.

Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề hệ phương trình và ứng dụng, luận văn "***Một số phương pháp giải hệ phương trình bậc hai tổng quát và ứng dụng***" nhằm cung cấp một số phương pháp giải các hệ đại số bậc hai hai ẩn dạng đối xứng và không đối xứng trên cơ sở đó áp dụng giải các bài toán có liên quan.

Luận văn là một chuyên đề nhằm cung cấp cho giáo viên và các em học sinh các cách giải hệ bậc hai tổng quát và ứng dụng của nó đối với các lĩnh vực đại số, giải tích, lượng giác... đặc biệt luận văn hướng tới bồi dưỡng học sinh giỏi bậc trung học phổ thông.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1 trình bày các tính chất cơ bản của đa thức, phương pháp giải phương trình bậc ba, bậc bốn tổng quát.

Chương 2 trình bày các phương pháp giải hệ bậc hai tổng quát dạng đối xứng và không đối xứng.

Chương 3 trình bày một số ứng dụng của hệ phương trình giải quyết một số dạng toán liên quan.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Giáo sư, Tiến sĩ khoa học Nguyễn Văn Mậu, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, cung cấp tài liệu và truyền đạt những kinh nghiệm nghiên cứu cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo trong Ban giám hiệu, phòng Đào tạo và khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Nguyễn Huệ, bạn bè đồng nghiệp và gia đình đã giúp đỡ tạo điều kiện tốt nhất để tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Học viên

Bùi Thị Mai

Chương 1

Các tính chất cơ bản của đa thức và phương trình đại số

1.1 Một số tính chất của đa thức đại số

Định nghĩa 1.1 (Xem [1],[4]). Đa thức trên trường số thực là biểu thức có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

trong đó $a_i \in \mathbb{R}$ và $a_n \neq 0$.

a_i được gọi là các hệ số của đa thức, trong đó a_n được gọi là hệ số cao nhất và a_0 được gọi là hệ số tự do.

n được gọi là bậc của đa thức và ký kiệu là $n = \deg(P)$. Ta quy ước bậc của đa thức hằng $P(x) = a_0$ với mọi x là bằng 0 nếu $a_0 \neq 0$ và bằng $-\infty$ nếu $a_0 = 0$.

Tập hợp tất cả các đa thức một biến trên trường các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}[x]$. Nếu các hệ số được lấy trên tập hợp các số hữu tỷ, các số nguyên thì ta có khái niệm đa thức với hệ số hữu tỷ, đa thức với hệ số nguyên và tương ứng là các tập hợp $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$.

Định nghĩa 1.2 (Đa thức bằng nhau). Hai đa thức $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ bằng nhau khi và chỉ khi $m = n$ và $a_k = b_k$ với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Định nghĩa 1.3 (Phép cộng, trừ đa thức). Cho hai đa thức $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$. Khi đó phép cộng và trừ hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ được thực hiện theo từng hệ số của x_k, tức là

$$P(x) \pm Q(x) = \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k \pm b_k)x^k$$

Ví dụ 1.1.

$$(x^3 + 3x^2 - x + 2) + (x^2 + x - 1) = x^3 + 4x^2 + 1.$$

Định nghĩa 1.4 (Phép nhân đa thức)**.** Cho hai đa thức $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$. Khi đó $P(x).Q(x)$ là một đa thức có bậc $m + n$ và có các hệ số được xác định bởi

$$P(x)Q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k, \tag{1.2}$$

trong đó $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Ví dụ 1.2.

$$\begin{aligned}
&(x^3 + x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 1) \\
&= (1.1)x^5 + (1.3 + 1.1)x^4 + (1.1 + 1.3 + 3.1)x^3 \\
&\quad + (1.1 + 3.3 + 2.1)x^2 + (3.1 + 2.3)x + (2.1) \\
&= x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 9x + 1.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta nhắc lại bậc của tổng, hiệu và tích của các đa thức.

Từ các định nghĩa trên đây, dễ dàng suy ra các tính chất sau :

Định lí 1.1 (Xem [1],[4])**.** Cho $P(x)$, $Q(x)$ là các đa thức bậc m, n tương ứng. Khi đó:

a) $\deg(P \pm Q) \le \max\{m, n\}$ trong đó nếu $\deg(P) \ne \deg(Q)$ thì dấu bằng xảy ra. Trong trường hợp $m = n$ thì $\deg(P \pm Q)$ có thể nhận bất cứ giá trị nào $\le m$.

b) $\deg(P.Q) = m + n$.

Định lí 1.2 (Xem [1],[4])**.** Với hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ bất kỳ, trong đó $\deg(Q) \geq 1$, tồn tại duy nhất các đa thức $S(x)$ và $R(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện:

i) $P(x) = Q(x).S(x) + R(x)$.

ii) $\deg(R) < \deg(Q)$.

Theo ký hiệu của định lý thì $S(x)$ được gọi là thương số và $R(x)$ được gọi là dư số trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Ví dụ 1.3. Thực hiện phép chia $3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$ cho $x^2 + 2x$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 - 2x^2 + 4x + 7 & x^2 + 2x \\
3x^3 + 6x^2 \quad\quad\quad\quad & 3x - 8 \\
-8x^2 + 4x + 7 & \\
-8x^2 - 16x \quad\;\; & \\
20x + 7 &
\end{array}
$$

Vậy ta có $3x^3 - 2x^2 + 4x + 7$ chia $x^2 + 2x$ được $3x - 8$, dư $20x + 7$.

Trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$, nếu dư số $R(x)$ đồng nhất bằng 0 thì ta nói rằng đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$. Như vậy, $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ nếu tồn tại đa thức $S(x)$ sao cho $P(x) = Q(x).S(x)$. Trong trường hợp này ta cũng nói $Q(x)$ chia hết $P(x)$, $Q(x)$ là ước của $P(x)$ hoặc $P(x)$ là bội của $Q(x)$. Ký hiệu tương ứng là $Q(x) \mid P(x)$ và $P(x) \vdots Q(x)$.

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức khác 0. Ước chung lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức $D(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $D(x)$ là đa thức đơn khởi, tức là có hệ số bậc cao nhất bằng 1.

ii) $D(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$, tức là $D(x) \mid P(x)$ và $D(x) \mid Q(x)$.

iii) Nếu $D'(x)$ cũng là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $D(x)$ cũng là ước của $D'(x)$.

Tương tự, ta có khái niệm bội chung nhỏ nhất của hai đa thức.

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức khác 0. Bội chung nhỏ nhất của $P(x)$ và $Q(x)$ là đa thức $M(x)$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

iv) $M(x)$ là đa thức đơn khởi, tức là có hệ số bậc cao nhất bằng 1.

v) $M(x)$ là bội chung của $P(x)$ và $Q(x)$, tức là $P(x) \mid M(x)$ và $Q(x) \mid M(x)$.

vi) Nếu $M'(x)$ cũng là bội chung của $P(x)$ và $Q(x)$ thì $M'(x)$ cũng là bội của $M(x)$.

Ký hiệu UCLN và BCNN của hai đa thức $P(x), Q(x)$ là $UCLN(P(x), Q(x))$, $BCNN(P(x), Q(x))$ hay đơn giản hơn là $(P(x), Q(x))$, $[P(x), Q(x)]$.
Hai đa thức $P(x)$, $Q(x)$ được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu

$$(P(x), Q(x)) = 1.$$

1.2 Phương pháp giải phương trình bậc ba, bậc bốn với hệ số thực

1.2.1 Phương trình bậc ba

Trong phần này ta nêu phương pháp giải phương trình bậc ba với hệ số thực tùy ý:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0. \tag{1.3}$$

Bài toán 1.1. Giải phương trình (1.3) khi biết một nghiệm $x = x_0$.

Lời giải. Theo giả thiết thì $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$

$$(1.3) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$$

$$\Leftrightarrow a(x^3 - x_0^3) + b(x^2 - x_0^2) + c(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)[ax^2 + (ax_0 + b)x + ax_0^2 + bx_0 + c] = 0.$$

1) Nếu $\Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ thì phương trình (1.3) có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

2) Nếu $\Delta \geq 0$ thì phương trình (1.3) có các nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = \dfrac{-(ax_0 + b) \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$$

Hệ quả 1.1. 1) Nếu x_0 là nghiệm của phương trình (1.3) thì điều kiện cần và đủ để phương trình (1.3) có ba nghiệm phân biệt là

$$\begin{cases} ax_0^2 + (ax_0 + b)x_0 + ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \\ \Delta = (ax_0 + b)^2 - 4a(ax_0^2 + bx_0 + c) > 0. \end{cases}$$

2) Nếu x_0 là nghiệm của (1.3) thì có thể phân tích :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_0)f(x) \tag{1.4}$$

trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai xác định.

3) Nếu x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình (1.3) thì

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

và có công thức Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Bài toán 1.2. Giải phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1.5}$$

với

$$ac^3 = db^3. \tag{1.6}$$

(Khi đó phương trình (1.5) – (1.6) có tên gọi là phương trình hồi quy bậc ba)

Lời giải. Từ (1.6) suy ra

1) $c = 0 \Rightarrow b = 0$ và

$$(1.6) \Leftrightarrow ax^3 + d = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}},$$

2) $c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$ và $\dfrac{d}{a} = (\dfrac{c}{b})^3$.

Đặt $\dfrac{c}{b} = -x_0$ thì $c = -bx_0, d = -ax_0^3$.