BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

CAO THỊ THẮM

ỨNG DỤNG TÍNH LIÊN TỤC VÀ TÍNH KHẢ VI CỦA HÀM SỐ TRONG PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

Giáo viên hướng dẫn:
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, 2015

Mục lục

Mở đầu

Cùng với khái niệm giới hạn, tính liên tục và tính khả vi của hàm số là những những kiến thức cơ sở quan trọng của giải tích toán học. Trong chương trình toán học ở bậc phổ thông, tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn được áp dụng nhiều, phong phú và đa dạng trong các bài toán khác nhau, nhất là các bài toán về sự tồn tại nghiệm của các phương trình.

Định lý Rolle, Định lý Lagrange, tính đơn điệu của hàm số cũng thường được sử dụng trong các đề thi có tính nâng cao, như thi học sinh giỏi cấp quốc gia hay quốc tế trong nhiều bài toán khác nhau, đặc biệt là chứng minh các bất đẳng thức, giải phương trình, hệ phương trình, v.v..

Hiện nay đã có khá nhiều tư liệu (sách giáo khoa, sách tham khảo, khóa luận, luận văn, chuyên đề Hội thảo, v.v..) bằng tiếng Việt về ứng dụng tính liên tục và tính khả vi của hàm số trong khảo sát hàm số, chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình,v.v.. Nhận xét rằng, ngoài phương trình hàm, nhìn chung các vấn đề trên đây đa phần là đối với những hàm số sơ cấp cụ thể, nên chưa có tính khái quát.

Với suy nghĩ và ý tưởng đó, mục tiêu của luận văn này nhằm khai thác tính liên tục và tính khả vi của hàm một biến trong phương trình và bất đẳng thức không đối với các hàm số cụ thể mà là bất kỳ.

Về tính liên tục, luận văn trình bày một số vấn đề có tính lý thuyết của hàm liên tục, như tính trù mật (giá trị trung gian), tính bị chặn, tính lồi, v.v..

Về phương trình, trong luận văn này đã xét bài toán về điểm bất động đối với các hàm liên tục trên một đoạn hữu hạn (compact), phương trình hàm, phương trình vi phân, v.v..

Về bất đẳng thức, ngoài một số bất đẳng thức đối với các hàm cụ thể, luận văn chủ yếu quan tâm đến bất đẳng thức hàm, bất đẳng thức đạo hàm tổng quát. Đặc biệt, luận văn còn trình bày một số bất đẳng thức đạo hàm nổi tiếng như bất đẳng thức Landau, bất đẳng thức Kolmogorow, bất đẳng thức Landau-Kolmogorow và bất đẳng thức Steklov đối với các hàm khả vi một biến. Đây là những bất đẳng thức của Toán học cao cấp chưa được trình bày trong các tài liệu bằng Tiếng Việt ở cấp độ Toán sơ cấp.

Kết cấu của Luận văn gồm có: Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Hàm số liên tục và ứng dụng, trình bày khái quát về hàm số liên tục, một số tính chất chuyên sâu của hàm số liên tục, điểm bất động của các hàm liên tục và các phương trình hàm.

Chương 2: Hàm khả vi và ứng dụng. Nội dung chương trình bày một số kiến thức cơ sở về đạo hàm vi phân, các định lí về giá trị trung bình. Từ các kiến thức nền tảng đó, nội dung quan trọng của chương là xét các phương trình, đẳng thức và bất đẳng thức đối với các hàm khả vi tổng quát.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Nguyễn Văn Ngọc- Trường Đại học Thăng Long. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên, và chỉ bảo hướng dẫn của Thầy. Em xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu và các thầy, cô trong trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ em hoàn thành khóa học cao học tại Trường. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán lớp N- Trường Đại học Khoa Học, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Hàm số liên tục và ứng dụng

Chương này trình bày ngắn gọn các khái niệm và tính chất của hàm liên tục một biến và một số bài toán liên quan. Các kiến thức của chương này được hình thành chủ yếu được từ các tài liệu [1] và [6].

1.1 Tính liên tục của hàm số

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. Giả sử $I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng hoặc hệ khoảng của trục thực và f là hàm nhận giá trị thực trong miền I. Cố định điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ (bao hàm cả trường hợp $x_0 \in I$). Ta nói f có giới hạn $l \in \mathbb{R}$ tại x_0 và viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0, \delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho nếu

$$x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số f xác định trong tập X và số $a \in X$. Hàm f được gọi là liên tục tại a nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ hay $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Định nghĩa 1.3. *Hàm f được gọi là liên tục phải tại a nếu*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Hàm f được gọi là liên tục trái tại a nếu

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Nếu các hệ thức trên đây không tồn tại thì ta nói hàm $f(x)$ tại x_0 có gián đoạn tương ứng phải, trái.

Nhận xét 1.1. *Hàm f liên tục tại a khi và chỉ khi*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Định nghĩa 1.4. *Một hàm không liên tục tại a được gọi là hàm gián đoạn tại a.*

Định nghĩa 1.5. *Hàm f liên tục tại mọi điểm $x \in (a;b)$ ta nói f liên tục trên khoảng $(a;b)$.*

Định nghĩa 1.6. *Hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ và liên tục phải tại a , liên tục trái tại b ta nói rằng f liên tục trên $[a;b]$.*

1.1.2 Các tính chất cơ bản

+ Tổng, hiệu, tích thương (với điều kiện mẫu khác 0) của các hàm liên tục tại a là hàm liên tục tại a.
+ Nếu hàm f liên tục tại a và hàm g liên tục tại $f(a)$ thì hàm hợp $g \circ f$ liên tục tại a.
+ Nếu f liên tục tại a và $f(a) > L$ thì $f(x) > L$ ở lân cận của a hay $\exists \delta > 0$ sao cho $f(a) > L$ với mọi x mà $|x - a| < \delta$.

1.2 Một số tính chất của liên tục

Định lý 1.1. (Tính trù mật của hàm liên tục). *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Chứng minh. Để chứng minh định lí ta thực hiện phương pháp chia đôi đoạn $[a;b]$.
Nếu trong quá trình thực hiện ta tìm được điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$ thì định lí được chứng minh.
Nếu không tìm được c thì quá trình trên giúp ta xây dựng được các dãy đoạn lồng nhau $[a_n;b_n]$ trong đó

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \text{ và } c_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(c) \le 0.$$

Tương tự

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = f(c) \ge 0,$$

trong đó $c \in (a; b)$. Vậy tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. □

Định lý 1.2. (Định lý về giá trị trung gian của hàm liên tục). *Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, thì $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$. Tức là, với mọi γ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ luôn tồn tại giá trị $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = \gamma$.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a) < f(b)$.
Ta thấy định lý dễ dàng được chứng minh khi $\gamma = f(a)$ hoặc $\gamma = f(b)$.
Xét γ với $f(a) < \gamma < f(b)$ ta đi chứng minh tồn tại giá trị $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = \gamma$.
Thật vậy, xét hàm $g(x) = f(x) - \gamma$ là một hàm liên tục trên $[a; b]$.
Ta lại có $g(a) < 0, g(b) > 0$ theo Định lý 1.1 luôn tồn tai giá trị $\gamma \in (a; b)$ để $g(c) = 0$.
Điều đó cho thấy luôn tồn tại giá trị $c \in [a; b]$ sao cho $f(c) = \gamma$. Định lý được chứng minh. □

Định lý 1.3. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì hàm số đạt được giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trên $[a; b]$. Tức là tồn tại $x_m, x_M \in [a; b]$ sao cho với mọi $x \in [a; b]$ ta luôn có $f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$.*

Chứng minh. Trước hết, ta đi chứng minh $f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$. Giả sử $f(x)$ không bị chặn trên $[a; b]$, tức là với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x_n \in [a; b]$ sao cho $|f(x_n)| \ge n$.
Dãy (x_n) bị chặn nên theo định lí Balzano-Weierstrass tồn tại một dãy con của nó $x_{n_k} \to x_0 \in [a; b]$ mà $f(x_{n_k}) \le n_k$. Chuyển qua giới hạn này ta có $|f(x_0)| = +\infty$ mâu thuẫn vì $f(x)$ liên tục tại x_0. Vậy $f(x)$ bị chặn.
Gọi $m = \underset{[a;b]}{inf}\, f(x), M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$. Lấy $\epsilon = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [a; b]$, sao cho $\dfrac{1}{n} > f(x_n) - m \ge 0$.
Theo định lí Balzano-Weierstrass tồn tại một dãy con của nó x_{n_k} của (x_n)

thỏa mãn $x_{n_k} \to x_m$ và $\dfrac{1}{n_k} > f(x_{n_k}) - m \leq 0$. Lấy giới hạn ta được

$$\lim_{x \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_m) = m.$$

Tương tự tồn tại x_M để $f(x_M) = \sup\limits_{[a;b]} f(x) = M$. □

Hệ quả 1.1. *Nếu $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục thì $f([a; b]) = [m; M] \subset \mathbb{R}$ trong đó $m = \underset{[a;b]}{inf}\, f(x), M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.*

Bài toán 1.1. (Hàm Dirichlet). *Xét tính liên tục của hàm số*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ,} \\ 0, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ.} \end{cases}$$

Lời giải. Vì trong bất kỳ lân cận nào của điểm hữu tỷ tìm được các điểm vô tỷ và ngược lại, nên với điểm x_o bất kỳ trong khoảng $(-\infty; +\infty)$ không tồn tại giới hạn $\lim_{x \to x_o} D(x)$.
Như vậy, tại mỗi một điểm của trục thực tồn tại sự gián đoạn loại hai (từ hai phía).

Bài toán 1.2. (Hàm Riemann). *Trên đoạn $[0; 1]$ xét hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, \text{ nếu } x = \dfrac{p}{q} \text{ là phân số tối giản,} \\ 0, \quad \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tại mỗi điểm hữu tỷ hàm số có gián đoạn loại một, còn tại mỗi điểm vô tỷ hàm số là liên tục.

Lời giải. Giả sử x_0 là một điểm tùy ý của đoạn $[0; 1]$. Với số $\varepsilon > 0$ chỉ tồn tại một số hữu hạn các số tự nhiên $q \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, nghĩa là trong đoạn $[0, 1]$ chỉ có một số hữu hạn các số hữu tỷ $\dfrac{p}{q}$, mà $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q} \geq \varepsilon$. Điểm x_0 có thể được bao bởi lân cận $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, sao cho trong đó không có điểm nào đã nói ở trên (ngoại trừ có thể là điểm x_0).
Khi đó với $|x - x_0| < \delta; (x \neq x_0)$ dù x là hữu tỷ hay vô tỷ, ta có $|f(x)| < \varepsilon$.
Nghĩa là, với mọi x_0 tồn tại

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

Nếu x_0 là số vô tỷ, thì $f(x) = 0$, nghĩa là tại điểm này hàm số là liên tục, nếu x_0 là số hữu tỷ, thì $f(x_0) \neq 0$, do đó có gián đoạn thông thường từ hai phía.

Bài toán 1.3. *Chứng minh rằng, nếu $f(x)$ là hàm liên tục, thì*

$$F(x) = |f(x)|$$

cũng là hàm liên tục.

Lời giải. Giả sử $\varepsilon > 0$ tùy ý. Khi đó tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$, sao cho

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon, \text{ khi } |x - x_o| < \delta.$$

Sử dụng bất đẳng thức $||A| - |B|| \leq |A - B|$, ta có

$$|F(x) - F(x_o)| = ||f(x)| - |f(x_o)|| \leq |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

nếu $|x - x_o| < \delta$, nghĩa là $F(x)$ cũng là hàm liên tục.

Bài toán 1.4. *Chứng minh rằng, nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì hàm*

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} |f(\xi)|, \;\; M(x) = \max_{a \leq \xi \leq x} |f(\xi)|$$

cũng là những hàm liên tục trên $[a; b]$.

Lời giải. Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, nên $\forall \varepsilon > 0, x_o \in [a; b]$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, x_o)$, sao cho khi $|h| < \delta$, thì

$$|f(x_o + h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Khi đó rõ ràng là

$$\sup_{|h| < \delta} |f(x_o + h) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Khi $|h| < \delta$ ta có

$$\begin{aligned} &- \sup_{0 \leq |h| < b} |f(x_o + h) - f(x_o)| + m(x_o)) \\ &\leq m(x_o + h) \leq m(x_o) + \sup_{0 \leq |h| < b} |f(x_o + h) - f(x_o)|. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Từ (1.1) và (1.2) suy ra

$$|m(x_o + h) - m(x_o)| < \varepsilon, \quad \text{nếu} \quad |h| < \delta.$$