ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐINH THỊ THU HÀ

PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC TRONG PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐINH THỊ THU HÀ

PHƯƠNG PHÁP BẤT ĐẲNG THỨC TRONG PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Chuyên nghành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong thời gian thực hiện luận văn này, tác giả đã nhận được sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Thông qua luận văn này, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và trân trọng những công lao, sự quan tâm, động viên và sự tận tình chỉ bảo, hướng dẫn của thầy Nguyễn Văn Mậu.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên; Sở GD - ĐT tỉnh Tuyên Quang; Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Trung Sơn - huyện Yên Sơn - tỉnh Tuyên Quang đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong suốt thời gian tác giả học tập, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Danh mục các kí hiệu

Để việc trình bày được ngắn gọn, trong luận văn sử dụng các kí hiệu sau:

1. $\mathbb{R}$ - Tập các số thực.
2. $\mathbb{N}$ - Tập các số tự nhiên.
3. $[a; b]$ - Đoạn (khoảng đóng) của hai đầu mút a, b.
4. $(a; b)$ - Đoạn (khoảng mở) của hai đầu mút a, b.
5. VT - Vế trái; VP - Vế phải.
6. D_f - tập xác định của $f(x)$; R_f - tập giá trị của hàm số $f(x)$.

MỞ ĐẦU

Chuyên đề về phương trình và hệ phương trình có vị trí rất đặc biệt trong toán học, không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực của giải tích, hình học, lượng giác và ứng dụng.

Trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán quốc gia, tuyển sinh đại học và Olympic Toán sinh viên thì các bài toán liên quan đến giải phương trình và hệ phương trình cũng hay được đề cập và được xem như là những dạng toán thuộc loại khó.

Ngoài những phương pháp truyền thống để giải phương trình và hệ phương trình, nhiều đề thi học sinh giỏi Toán quốc gia, Olympic Toán khu vực và quốc tế thường hay đề cập đến các lớp phương trình và hệ phương trình giải bằng phương pháp so sánh. Đó là lớp các bài toán mà ẩn cần tìm là những hệ số của đa thức chưa biết, những dạng phương trình mà vế phải và vế trái không thuộc cùng một loại hàm, chẳng hạn như vế trái là biểu thức đại số còn vế phải thì là các biểu thức lượng giác, mũ, logarit,... Các bài toán liên quan đến các phương trình và hệ phương trình loại này không nằm trong chương trình chính thức của Toán đại số và giải tích ở bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng cho nhu cầu bồi dưỡng học sinh giỏi ở bậc trung học phổ thông về chuyên đề phương pháp bất đẳng thức trong khảo sát phương trình và hệ phương trình, luận văn "Phương pháp bất đẳng thức trong phương trình và hệ phương trình" nhằm khảo sát một số lớp phương trình, đồng thời cung cấp một phương pháp giải đặc biệt cho một số lớp phương trình và hệ phương trình trong đại số và lượng giác.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1. Các kiến thức bổ trợ. Chương này trình bày các kiến thức cơ bản về hàm số (tính đồng biến, tính nghịch biến, tính liên tục, ...), các định lý về số nghiệm của phương trình, hệ phương trình và một số bất đẳng thức cơ bản.

Chương 2. Một số lớp phương trình giải bằng phương pháp so sánh. Chương này trình bày một số dạng toán về phương trình giải bằng phương pháp so sánh. Đưa ra một số dạng phương trình qua các lỳ thi Olympic.

Chương 3. Hệ phương trình giải bằng phương pháp so sánh. Chương này trình bày một số lớp bài toán về hệ phương trình giải bằng phương pháp so sánh. Đưa ra phương pháp giải một số hệ phương trình đặc biệt và trình bày một số bài toán liên quan đưa về giải các phương trình và hệ phương trình tương ứng bài toán xác định hệ số đa thức.

Thái Nguyên, ngày 06 tháng 04 năm 2015

Tác giả

Đinh Thị Thu Hà

Chương 1

Các kiến thức bổ trợ

1.1 Các tính chất cơ bản của hàm số

Tính chất 1.1. Nếu hàm số luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên (a, b) thì số nghiệm của phương trình: $f(x) = k$ trên $(a; b)$ không hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in (a; b)$.

Tính chất 1.2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến); hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình: $f(x) = g(x)$ không quá một.

Tính chất 1.3 (Định lí Rolle)**.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b], (a < b)$; có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho$f'(c) = 0$.
Từ định lý này, ta có được hệ quả:

Hệ quả 1.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì giữa hai nghiệm (liên tiếp) thuộc $(a; b)$ của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

Hệ quả 1.2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm $x \in (a; b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm $x \in (a; b)$.

Hệ quả 1.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k, liên tục trên $(a; b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

***) Một số lưu ý khi sử dụng tính đơn điệu của hàm số**

Để phát hiện được tính đơn điệu của hàm số chúng ta cần nắm vững các tính chất:

- Nếu $y = f(x) > 0$ và đồng biến (nghịch biến) thì:

* $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến (nghịch biến).

* $y = \dfrac{1}{f(x)}$ với nghịch biến (đồng biến).

* $y = -f(x)$ nghịch biến (đồng biến).

- Tổng của các hàm số đồng biến (nghịch biến) trên D là một hàm số đồng biến (nghịch biến) trên D.

- Tích của các hàm số dương đồng biến (nghịch biến) trên D là một hàm số đồng biến (nghịch biến) trên D.

- Nếu hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập D, thì $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x > y$ (với mọi $x, y \in D$).

- Nếu hàm số $f(t)$ nghịch biến trên tập D, thì $f(x) > f(y) \Leftrightarrow x < y$ (với mọi $x, y \in D$).

- Nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đồ thị hàm số $y = g(x)$.

- Nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ cùng phương với trục hoành.

- Nếu phương trình $f(x) = m$ có nghiệm thuộc miền D
$\Leftrightarrow \min\limits_{D} f(x) \le m \le \max\limits_{D} f(x)$.

Định lí 1.1 (Lagrange)**.** Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$
sao cho $f\left(b\right) - f\left(a\right) = f'\left(c\right)\left(b - a\right)$ hay là $f'\left(c\right) = \dfrac{f\left(b\right) - f\left(a\right)}{b - a}$.

Nhận xét 1.1. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm liên tục trên các khoảng $(a; b)$. Các hàm số $\varphi\left(x\right), \psi\left(x\right)$ xác định trên đoạn $[c; d]$. Khi đó, nếu $f'\left(x\right) + 1 \ne 0$ với mọi $x \in (a; b)$, thì ta có

$$f\left(\varphi\left(x\right)\right) - f\left(\psi\left(x\right)\right) = \psi\left(x\right) - \varphi\left(x\right) \Leftrightarrow \psi\left(x\right) = \varphi\left(x\right).$$

Nhận xét 1.2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm liên tục trên các khoảng $(a; b)$ và $f\left([a; b]\right) \subseteq [a; b]$. Khi đó:

1. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì trên $[a;b]$ ta có:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x;$$
$$f(f(f(x))) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

2. Nếu $f'(x) - 1 \neq 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì trên $[a;b]$ ta cũng có:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x.$$

Định lí 1.2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu $f'(x) > 0$, với mọi $x \in (a;b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
- Nếu $f'(x) < 0$, với mọi $x \in (a;b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

1.2 Một số bất đẳng thức cổ điển

Định lí 1.3 (Bất đẳng thức AM - GM)**.** Với n số dương a_1, a_2,..., a_n ta có
$\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Định lí 1.4 (Bất đẳng thức Cauchy)**.** Với hai bộ số thực khác 0 bất kỳ (a_1, a_2, ..., a_n); (b_1, b_2, ..., b_n), ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Định lí 1.5 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)**.** $\forall x_i > 0,\ i = \overline{1,n}$ ta có
$[\dfrac{a_1^2}{x_1} + \dfrac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{x_n} \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$.

1.3 Một số bài toán cực trị

Bài toán 1.1. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức
$T = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt{1 + 2y}$ khi x và y thỏa mãn $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 2$.

Bài giải. Do

$$\sqrt{1 + 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(1 + 2x).3} \leq \frac{2x + 4}{2\sqrt{3}} \leq \frac{x^2 + 5}{2\sqrt{3}}$$