ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
– – – – – – – – – – –

ĐỖ THỊ VÂN ANH

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM LỒI VÀ ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ VÂN ANH

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM LỒI VÀ ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 12

Giáo viên hướng dẫn
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, 2015

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên của khóa luận này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới người thầy kính mến TS. Nguyễn Văn Ngọc, đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo khoa Toán, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học, những người đã trực tiếp giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường cùng toàn thể bạn bè và người thân đã đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và trong khuôn khổ của luận văn thạc sỹ nên bản luận văn mới chỉ trình bày được một phần nào đó. Do thời gian có hạn và năng lực có phần hạn chế nên chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Học viên

Đỗ Thị Vân Anh

Mở đầu

Lý thuyết của các hàm lồi có vị trị quan trọng trong Toán học vì nó liên quan đến nhiều lĩnh vực của Toán học, như giải tích lồi, giải tích hàm, tối ưu, quy hoạch, v.v... và là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Chúng tôi cũng được biết hiện nay đã có nhiều luận án và luận văn bằng tiếng Việt về hàm lồi, nhưng các luận văn này hầu hết là thuộc chuyên ngành Toán ứng dụng, hay Toán giải tích.

Trong chương trình Toán học ở bậc phổ thông, bất đẳng thức Jensen và các mở rộng của nó đối với các hàm lồi, hàm lõm là công cụ hữu hiệu để chứng minh các bất đẳng thức, hay tìm cực trị của các hàm số, đặc biệt là đối với các hàm số có tính đối xứng theo các biến. Tuy nhiên, các kiến thức về hàm lồi lại chưa được dạy ở bậc phổ thông (ở thập niên 90 của thế kỷ trước đã có giới thiệu về hàm lồi và hàm lõm trong Giải tích 12, nhưng sau đó đã bỏ đi). Hiện nay, các kiến thức về hàm lồi vẫn được dạy cho các học sinh giỏi tham gia các đội tuyển quốc gia hay quốc tế. Do đó, việc bồi dưỡng và nâng cao kiến thức về hàm lồi và ứng dụng của người dạy Toán ở bậc THPT là cần thiết và bổ ích. Đó là lý do tôi chọn đề tài này làm luận văn khoa học trong chuyên ngành *Phương pháp Toán sơ cấp*.

Mục đích của luận văn gồm có:

1. Tìm hiểu và học tập về hàm số lồi, đặc biệt là bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Karamata và các mở rộng.

2. Trình bày chứng minh của các bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức của dãy số, như bất đẳng AM-GM, bất đẳng thức Cauchy- Schwartz, bất đẳng thức Holder, v.v.. bằng phương pháp sử dụng các tính chất của hàm lồi. Các chứng minh này còn ít được giới thiệu trong các sách chuyên

khảo về toán sơ cấp bằng tiếng Việt.

3. Sưu tầm và trình bày cách chứng minh một số bài toán nâng cao của đại số và hình học về bất đẳng thức và cực trị bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Jensen và các tính chất khác của các hàm lồi.

Bố cục của luận văn gồm có: Mở đầu, hai chương nội dung, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: **Hàm lồi và các tính chất,** trình bày cơ sở lý thuyết của hàm lồi (hàm lõm), như định nghĩa hàm lồi (hàm lõm) và các tính chất cơ bản của hàm lồi.

Chương 2: **Một số bất đẳng thức và cực trị của các hàm lồi** là nội dung chính của luận văn. Chương này trình bày những ứng dụng của bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức Karamata chứng minh các bất đẳng thức từ cơ bản đến nâng cao chủ yếu về đại số và lượng giác, trong đó có bất đẳng thức Shapiro. Các bài toán về bất đẳng thức hình học chỉ chiếm vị trí khiêm tốn trong luận văn.

Ngoài các bài toán về bất đẳng thức, chương này còn xét vấn đề cực trị của một lớp hàm lồi nhiều biến và một số bài toán liên quan.

Chương 1

Hàm lồi và các tính chất

Chương này trình bày cơ sở lý thuyết của hàm lồi (hàm lõm), như định nghĩa hàm lồi (hàm lõm) và các tính chất cơ bản của hàm lồi. Nội dung của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1] và [6].

1.1 Định nghĩa

Nếu không có gì cụ thể, trong chương này chúng ta sẽ dùng ký hiệu $I(a, b)$ để ngầm định một trong bốn tập hợp (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1. Cho $I = I(a, b) \subset \mathbb{R}$ và hàm số $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi trên I nếu $\forall x, y \in I$ và $\exists \lambda \in [0, 1]$ thì

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y). \tag{1.1}$$

Nếu bất đẳng thức trên là ngặt với $x \neq y$ và $\lambda \in (0, 1)$ thì ta nói hàm f là hàm lồi chặt.
Hàm số $f(x)$ được gọi là lõm trong khoảng nói trên, nếu bất đẳng thức (1.1) có chiều ngược lại, tức là

$$f(\lambda x + (1 - \lambda y)) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y). \tag{1.2}$$

Dưới đây là một số hàm lồi, lõm đơn giản.

Ví dụ 1.1. *Xét một số hàm thường gặp sau đây*
1) $f(x) = c, g(x) = x$ *là những hàm vừa lồi vừa lõm trên* $\mathbb{R}$.
2) $f(x) = x^r$ *với* $r \geq 1$ *là lồi trên* $(0, \infty)$, *với* $0 \leq r < 1$ *là hàm lõm trên*

$(0, \infty)$.

3) $f(x) = e^x$ *là hàm lồi chặt trên* $\mathbb{R}$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^r}$ *là hàm lồi trên khoảng* $), x < \infty$, *nếu* $r > 0$. *Khi* r *là số nguyên âm lẻ* $r = -2m - 1$ *thì* $f(x)$ *là hàm lõm trên* $-\infty < x < 0$, *còn với* r *là số nguyên âm chẵn* $r = -2m$, *thì* $f(x)$ *là hàm lồi trong khoảng nói trên.*

5) $f(x) = logx$ $(\ln x > 0, x > 0)$ *là hàm lõm trên khoảng* $(0, \infty)$.

Sử dụng tính chất để kiểm tra các hàm số. Ta thấy
$f(x) = e^x, x \in R$,
$f(x) = tanx, x \in (0, \frac{\pi}{2})$,
$f(x) = x^a, a > 1, x \in (0, +\infty)$
là những hàm lồi chặt. Trong khi đó các hàm số sau
$f(x) = log_a x, a > 1, x \in (0, +\infty)$,
$f(x) = sinx, x \in (0, \pi)$,
$f(x) = cox, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
là những hàm lõm chặt.

1.2 Một số tính chất cơ bản của hàm lồi, lõm

Các tính chất sau đây của các hàm lồi, lõm được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Tính chất 1.1. *Nếu* $f(x)$ *là hàm lồi (lõm) trên* $I(a, b)$ *thì* $-f(x)$ *là hàm lõm (lồi) trên* $I(a, b)$.

Tính chất 1.2. *Nếu* $f(x)$ *là hàm lồi trên* $I(a, b)$ *và* $c = const$, *thì* $cf(x)$ *là hàm lồi nếu* $c > 0$, *là hàm lõm nếu* $c < 0$.

Tính chất 1.3. *Tổng hữu hạn các hàm lồi (lõm) trên* $I(a, b)$ *là một hàm lồi (lõm) trên* $I(a, b)$.

Tính chất 1.4. *Cho f là lồi trên khoảng I(a, b). Chứng minh rằng với* $x, y, z \in I,\ \ x < y < z$ *có bất đẳng thức*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{1.3}$$

Chứng minh. Giả sử $x, y, z \in I$ và $x < y < z$. Tồn tại $\lambda \in (0, 1)$ sao cho $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$. Khi đó

$$\lambda = \frac{y - z}{x - z}$$

và

$$1 - \lambda = \frac{x - y}{x - z}.$$

Vì f là hàm lồi nên ta có

$$f(y) \leq \frac{y - z}{x - z} f(x) + \frac{x - y}{x - z} f(z).$$

Do đó

$$f(y) - f(x) \leq \frac{y - x}{x - z} f(x) + \frac{x - y}{x - z} f(z),$$

Hay

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

□

Tính chất 1.5. *Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu hàm $g(x)$ là lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.*

Tính chất 1.6. *Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ là hàm lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$, thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.*

Tính chất 1.7. *Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và đơn điệu (đồng biến hay nghịch biến) trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ thì ta có các kết quả sau đây*

1. *$f(x)$ lõm, đồng biến khi và chỉ khi $g(x)$ lồi đồng biến.*
2. *$f(x)$ lõm, nghịch biến khi và chỉ khi $g(x)$ lõm nghịch biến.*
3. *$f(x)$ lồi, nghịch biến khi và chỉ khi $g(x)$ lồi, nghịch biến.*