ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ HÀ THU

LÝ THUYẾT POLYA VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ HÀ THU

LÝ THUYẾT POLYA VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan mọi thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 4 năm 2015

Học viên

Bùi Thị Hà Thu

Lời nói đầu

Luận văn này trình bày lại một số kết quả về lý thuyết Polya và một vài vận dụng. Luận văn được chia ra làm hai chương. Chương 1 gồm năm mục. Mục 1.1 trình bày về khái niệm nhóm. Trong Mục 1.2 tập trung viết về nhóm các phép hoán vị. Mục 1.3 được dành để chứng minh lại Bổ đề Burnside. Mục 1.4 được dành để viết về xích các đa thức chỉ số. Trong Mục 1.5 chúng tôi chứng minh Định lý Polya. Chương 2 gồm hai mục. Mục 2.1 trình bày một vài vận dụng Định lý Polya trong bài toán tô màu. Mục 2.2 trình bày một vài ví dụ về việc vận dụng Định lý Polya trong bài tóan tổ hợp.

Trong thời gian sưu tầm tài liệu, làm đề cương và viết luận văn, tôi đã nhận được sử góp ý và chỉ dẫn tận tình của người hướng dẫn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy của mình, PGS.TS Đàm Văn Nhỉ. Nhân đây, tôi cũng xin chân thành cảm ơn Khoa Toán- Tin, Khoa Sau đại học Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình học tập của tôi. Tôi cũng xin được cảm ơn sự nhiệt tình giảng dạy của các giảng viên trong suốt thời gian tôi học tập. Tôi xin cảm ơn Ban giám hiệu Trường THPT Hải An đã luôn tạo điều kiện tốt cho tôi công tác và học tập, để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập của mình. Cuối cùng, tôi xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt nhất tới đại gia đình, vì những động viên khích lệ giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên ngày 16 tháng 04 năm 2015

Bùi Thị Hà Thu

Chương 1

Lý thuyết Polya

1.1 Khái niệm nhóm

1.1.1 Quan hệ tương đương

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích đề các $X \times X$ được định nghĩa như sau:

$$X \times X = \{(x, y)|x, y \in X\}.$$

Định nghĩa 1.1.1. Tập con S của $X \times X$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trong X. Nếu $(x, y) \in S$ thì ta nói *x có quan hệ S với y* và viết xSy.

Định nghĩa 1.1.2. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X. Quan hệ S được gọi là một *quan hệ tương đương* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(1) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có xSx.

(2) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy thì cũng có ySx.

(3) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz.

Khi S là một quan hệ tương đương trong X thì ta thường ký hiệu $\sim$ thay cho S. Đặt $C(x) = \{y \in X|y \sim x\}$ và gọi nó là một *lớp tương đương* với x làm *đại diện.* Dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

Mệnh đề 1.1.3. *Với quan hệ tương đương $\sim$ trong $X \neq \emptyset$ ta có*

(1) *Với mọi* $x \in X$ *có* $x \in C(x)$.

(2) *Với mọi* $y, z \in C(x)$ *có* $y \sim z$ *và* $y, z \sim x$.

(3) *Với mọi* $x, y \in X$, *có hoặc* $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ *hoặc* $C(x) = C(y)$.

(4) *Tập thương* $X/\sim$ *là tập các lớp tương đương không giao nhau.*

1.1.2 Nhóm con chuẩn tắc và nhóm thương

Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm và ký hiệu về nhóm.

Định nghĩa 1.1.4. Tập $G \neq \emptyset$ với phép toán hai ngôi $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x.y$ được gọi là một *nhóm* nếu nó thỏa mãn ba điều kiện

(1) $(x.y).z = x.(y.z)$ với mọi $x, y, z \in G$.

(2) Có phần tử $e \in G$, được gọi là *đơn vị*, thỏa mãn $e.x = x.e = x$ với mọi $x \in G$

(3) Với mỗi $x \in G$ có phần tử $x' \in G$ để $x.x' = x'.x = e$.

Do tính duy nhất của x' cho mỗi x nên x' được ký hiệu qua x^{-1} và được gọi là *phần tử nghịch đảo* của x. Nhóm G được gọi là một *nhóm giao hoán* hay *nhóm abel* nếu $x.y = y.x$ với mọi $x, y \in G$. Để đơn giản, nhiều khi thay cho tích $x.y$ ta viết đơn giản xy và đôi khi để biết phép toán hai ngôi trong nhóm G ta cũng thường viết $(G, .)$. Đôi khi người ta cũng thường ký hiệu phần tử đơn vị của nhóm G bởi 1.

Định nghĩa 1.1.5. Cho hai nhóm $(G, .)$ và $(G', \circ)$. Ánh xạ $\phi : G \to G'$ được gọi là một *đồng cấu* nếu $\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$ thỏa mãn cho mọi $x, y \in G$. Đồng cấu ϕ được gọi là một *đẳng cấu* nếu nó là một song ánh.

Định nghĩa 1.1.6. Cho nhóm G. Lực lượng của G, ký hiệu $|G|$, được gọi là *cấp* của G. Nếu $|G| < \infty$ thì G được gọi là *nhóm hữu hạn*.

Định nghĩa 1.1.7. Tập con H khác rỗng của nhóm G thỏa mãn $x.y \in H$ và $x^{-1} \in H$, khi $x, y \in H$, được gọi là một *nhóm con* của G. Nhóm con A của nhóm G được gọi là một *nhóm con chuẩn tắc* của G nếu $xax^{-1} \in A$ với mọi $a \in A, x \in G$.

Giả thiết A là một nhóm con của nhóm G. Ta ký hiệu hai tập sau:

$$xA = \{xa|a \in A\}, Ax = \{ax|x \in A\}.$$

Tập xA được gọi là *lớp ghép trái* của A trong X; Tập Ax được gọi là *lớp ghép phải* của A trong G. Ký hiệu tập thương của G trên A qua

$$G/A = \{xA|x \in G\}.$$

Tiếp tục, định nghĩa quan hệ $\sim$ trong nhóm G như sau: Với $x, y \in G$, quan hệ $x \sim y$ nếu $x^{-1}y \in A$.

Bổ đề 1.1.8. *Quan hệ $\sim$ trong G là một quan hệ tương đương.*

Chứng minh: Vì $e \in A$ nên $x^{-1}x = e \in G$. Vậy $x \sim x$ với mọi $x \in G$. Giả sử $x, y \in G$ thỏa mãn $x \sim y$. Khi đó $x^{-1}y \in A$. Vì A cũng chính là một nhóm nên $y^{-1}x = \left(x^{-1}y\right)^{-1} \in A$. Do vậy $y \sim x$. Cuối cùng, giả sử $x, y, z \in G$ thỏa mãn $x \sim y$ và $y \sim z$. Khi đó $x^{-1}y, y^{-1}z \in A$ và ta có $x^{-1}z = x^{-1}y.y^{-1}z \in A$. Từ đây suy ra $x \sim z$. Tóm lại, quan hệ $\sim$ trong G là một quan hệ tương đương. □

Hệ quả 1.1.9. *Với $x, y \in G$, $xA = yA$ khi và chỉ khi $x^{-1}y \in A$.*

Chứng minh: Kết quả được suy ra từ Bổ đề 1.1.8. □

Bổ đề 1.1.10. *Với quan hệ tương đương $\sim$ trong G, mỗi lớp $C(x) = xA$ với $x \in G$.*

Chứng minh: Thật vậy, vì $\sim$ là một quan hệ tương đương theo Bổ đề 1.1.8 nên ta có các lớp $C(x)$. Lấy $y \in C(x)$. Khi đó $x \sim y$ và ta có $x^{-1}y \in A$. Vậy, tồn tại $a \in A$ để $x^{-1}y = a$. Từ đây suy ra $y = xa \in xA$. Do y được lấy tùy ý nên $C(x) \subset xA$. Lấy $y \in xA$. Khi đó có $a \in A$ để $y = xa$. Vậy $x^{-1}y = a \in A$ hay $y \sim x$ và suy ra $y \in C(x)$. Do y được lấy tùy ý nên $C(x) \supset xA$. Tóm lại $C(x) = xA$ □

Định lý 1.1.11. *Nhóm con A là nhóm con chuẩn tắc của nhóm G khi và chỉ khi $xA = Ax$ với mọi $x \in G$.*

Chứng minh: Giả thiết A là một nhóm con chuẩn tắc của nhóm G. Lấy $y = xa \in xA$. Vì A là một nhóm con chuẩn tắc nên $xax^{-1} \in A$. Vậy có $b \in A$ để $xax^{-1} = b$ và suy ra $y = xa = bx \in Ax$. Do y được lấy tùy ý từ xA nên $xA \subset Ax$. Tương tự có $xA \supset Ax$. Tóm lại, $xA = Ax$ với mọi $x \in G$.
Ngược lại, Giả thiết $xA = Ax$ với mọi $x \in G$. Với $x \in G, a \in A$ có $xa \in xA = Ax$ và như vậy, tồn tại $b \in A$ để $xa = bx$ hay $xax^{-1} = b \in A$. Điều này chỉ ra A là nhóm con chuẩn tắc của nhóm G □

Định lý 1.1.12. *Với nhóm con chuẩn tắc A của nhóm G, ánh xạ $G/A \times G/A \to G/A, (xA, yA) \mapsto xyA$ là một phép toán hai ngôi và tập thương $G/A = \{xA | x \in G\}$ cùng phép toán hai ngôi trên lập thành một nhóm. Nhóm này được gọi là* nhóm thương *của G trên A.*

Chứng minh: Ta có kết quả từ Bổ đề 1.1.10 và Định lý 1.1.11. □

Có nhiều nhóm con quan trọng được sinh ra bởi một tập con của G. Giả sử A là một tập con khác rỗng của nhóm G. *Chuẩn tắc hóa* của A trong G là một nhóm con của G được định nghĩa bằng

$$N_G(A) = \{x \in G | xax^{-1} \in A, \forall\, a \in A\}.$$

Tâm hóa của A trong G là một nhóm con của G được định nghĩa bằng

$$C_G(A) = \{x \in G | xa = ax, \forall\, a \in A\}.$$

Tâm của G là một nhóm con của G được định nghĩa bằng

$$Z(G) = \{x \in G | xa = ax, \forall\, a \in G\}.$$

Chú ý rằng, $Z(G) = C_G(G)$ và $Z(G)$ là một nhóm con chuẩn tắc của nhóm G.
Cấp của phần tử $x \in G$ là số tự nhiên dương nhỏ nhất r để $x^r = e$. Nếu ta ký hiệu nhóm cyclic do x sinh ra qua $< x >$ thì ta có ngay $< x >= \{e, x, \dots, x^{r-1}\}$ và $r = | < x > |$. Chú ý cấp của e bằng 1.

1.1.3 Định lý Lagrange và các hệ quả

Trong phần này chúng ta chứng minh một vài kết quả quan trọng về lý thuyết nhóm. Giả sử A là một nhóm con của nhóm hữu hạn G. *Chỉ số* của A trong G, ký hiệu qua $|G : A|$ hoặc $\mathrm{ind}(A)$, được định nghĩa bằng $|G/A|$.

Định lý 1.1.13. [Lagrange] *Với nhóm con A của nhóm hữu hạn G ta luôn có $|G| = |A||G : A|$.*

Chứng minh: Giả thiết G là nhóm hữu hạn cấp $n = |G|$ và A là nhóm con của G với $m = |A|$ và $k = |G : A|$. Với mỗi $x \in G$ ta định nghĩa ánh xạ $f_x : A \to xA, a \mapsto xa$. Hiển nhiên, ánh xạ f_x là một toàn ánh. Từ $xa = xb$ suy ra $a = b$. Vậy f_x còn là một đơn ánh. Do vậy, f_x là một song ánh và suy ra $m = |A| = |xA|$. Vì các $xA = C(x)$ là tách biệt theo Mệnh đề 1.1.3 nên G được phân ra thành k lớp phân biệt và mỗi lớp đều chứa đúng m phần tử. Do vậy $|G| = mk = |A||G : A|$. □

Hệ quả 1.1.14. *Cấp của mỗi phần tử thuộc nhóm hữu hạn G là một ước số của $n = |G|$.*

Chứng minh: Xét nhóm con A sinh ra bởi phần tử a. Cấp của a bằng $|A|$. Vì $|A|$ là một ước của $|G|$ theo Định lý 1.1.13 nên cấp của phần tử A thuộc nhóm hữu hạn G là một ước số của $n = |G|$. □

Hệ quả 1.1.15. [Cauchy] *Với nhóm abel hữu hạn G và số nguyên tố p chia hết cấp $n = |G|$ luôn có phần tử của G cấp p.*

Chứng minh: Quy nạp theo cấp n của nhóm G. Lấy phần tử $x \in G, x \neq e$. Nếu $n = p$ thì G là nhóm cyclic cấp p với phần tử sinh là x theo Định lý 1.1.13. Vậy x có cấp p. Bây giờ giả thiết $n > p$ và tất cả các nhóm con của G đều có cấp nhỏ hơn n và xét những nhóm con với cấp chia hết cho p. Ta chỉ ra những nhóm con như vậy sẽ có phần tử cấp p.

Trước tiên, xét trường hợp cấp m của phần tử x chia hết cho p. Khi đó $m = |< x >| = kp$. Vậy $e = x^m = (x^k)^p$. Từ đây suy ra $|< x^k >| = p$ và x^k có cấp p.