ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ MAI

MỘT SỐ DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC PHÂN THỨC CÓ RÀNG BUỘC BỞI ĐA THỨC VIÈTE

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ MAI

MỘT SỐ DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC PHÂN THỨC CÓ RÀNG BUỘC BỞI ĐA THỨC VIÈTE

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các số liệu và kết quả nghiên cứu trong luận văn này là không trùng lặp với các đề tài khác và được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Một số kết quả trong luận văn là mới và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình nào khác mà tôi biết. Tôi cũng xin cam đoan mọi thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015

Học viên

Lê Thị Mai

Mở đầu

Bất đẳng thức là một nội dung chuyên đề quan trọng của Toán học. Ngay từ khi ra đời, bất đẳng thức đã có sức hút mạnh mẽ đối với những người yêu toán, không chỉ ở vẻ đẹp hình thức mà cả những bí ẩn nó mang đến, luôn thôi thúc người ta quan tâm tìm tòi, sáng tạo. Đặc biệt, bất đẳng thức còn có nhiều ứng dụng trong các môn khoa học khác và trong ứng dụng thực tế. Ngày nay, bất đẳng thức vẫn luôn chiếm một vị trí quan trọng và vẫn thường xuất hiện trong các kì thi Olympic quốc gia, khu vực và quốc tế.

Phân thức hữu tỷ là một trong những khái niệm cơ bản của chương trình Toán ở bậc học phổ thông. Đặc biệt, ở các trường THPT chuyên và các lớp chuyên toán có rất nhiều dạng toán liên quan đến hàm phân thức. Trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán trong nước và các kỳ thi Olympic Toán của các nước trên thế giới, có nhiều bài toán về dãy số, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình ... sinh bởi các hàm số dạng phân thức và vì thế cần biết cách giải vận dụng tính đặc thù của biểu thức phân thức đã cho. Hiện nay các tài liệu có tính hệ thống về vấn đề này còn chưa được đề cập nhiều.

Là một giáo viên THPT, tôi muốn nghiên cứu sâu hơn về bất đẳng thức nhằm nâng cao chuyên môn phục vụ cho quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, vậy nên tôi đã chọn đề tài "Một số dạng bất đẳng thức phân thức có ràng buộc bởi đa thức Viète” làm luận văn thạc sĩ của mình.

Bất đẳng thức vô cùng rộng lớn, trong thời gian ngắn, tôi chỉ có thể khảo sát một số chuyên đề nhỏ trong đó. Dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu, tác giả đã hoàn thành luận văn với để tài

Một số dạng bất đẳng thức phân thức có ràng buộc bởi đa thức Viète

Luận văn được chia làm ba chương:

- Chương 1. Một số kiến thức bổ trợ.
- Chương 2. Một số dạng bất đẳng thức phân thức có ràng buộc bởi đa thức Viète.
- Chương 3. Một số phương pháp khảo sát bất đẳng thức dạng phân thức.

Mặc dù có nhiều cố gắng, song do thời gian và trình độ bản thân còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các anh chị đồng nghiệp và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Qua luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, người Thầy đã truyền cho tác giả có niềm say mê nghiên cứu toán học. Thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán và các thầy cô đã tạo điều kiện thuận lợi cho em hoàn thành bản luận văn này.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 26 tháng 03 năm 2015

Lê Thị Mai

Học viên Cao học Toán Lớp B, khóa 06/2013-06/2015

Chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Email: `lethimai@als.edu.vn`

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ

Chương này trình bày một số tính chất của đa thức cần thiết để sử dụng trong các chương sau, dựa theo các tài liệu [1]-[5] và trình bày một số dạng bất đẳng thức cổ điển được sử dụng nhiều trong các chương sau như Bất đẳng thức AM - GM, Bất đẳng thức Cauchy - schwarz, bất đẳng thức Karamata, ...

1.1 Đa thức đối xứng ba biến

Định nghĩa 1.1. Một đơn thức $\varphi(x, y, z)$ của các biến x, y, z được hiểu là hàm số có dạng

$$\varphi(x, y, z) = a_{klm}x^k y^l z^m,$$

trong đó $k, l, m \in \mathbb{N}$ được gọi là bậc của biến x, y, z, số $a_{klm} \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ được gọi là hệ số của đơn thức, còn số $k + l + m$ được gọi là bậc của đơn thức $\varphi(x, y, z)$.

Định nghĩa 1.2. Một hàm số $P(x, y, z)$ của các biến x, y, z được gọi là một đa thức nếu nó có thể được biểu diễn ở dạng tổng hữu hạn các đơn thức

$$P(x, y, z) = \sum_{\substack{k,l,m\in\mathbb{N}\\ k+l+m=n}} a_{klm}x^k y^l z^m, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.3. Đa thức $P(x, y, z)$ được gọi là đối xứng, nếu nó không thay đổi với mọi hoán vị của x, y, z, nghĩa là

$$P(x, y, z) = P(y, x, z) = P(z, y, x) = P(x, z, y).$$

Định nghĩa 1.4. Đa thức $f(x, y, z)$ được gọi là thuần nhất bậc m, nếu

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z), \quad t \neq 0$$

Định nghĩa 1.5. Các đa thức

$$\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz,$$

được gọi là đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z.

Định nghĩa 1.6 (Tổng lũy thừa)**.** Các đa thức $s_k = x^k + y^k + z^k, (k = 0, 1, ...)$, được gọi là tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y, z.

Tính chất 1.1 (Công thức Newton)**.** Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có hệ thức

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

Tính chất 1.2. Một tổng lũy thừa $s_k = x^k + y^k + z^k$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Định lí 1.1 (Công thức Waring)**.** Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cở sở theo công thức

$$\frac{s_k}{k} = \sum_{\substack{0 \leq l, m, n \\ l+2m+3n=k}} \frac{(-1)^{k-l-m-n}(l+m+n-1)!}{l!m!n!} \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n.$$

1.2 Một số dạng bất đẳng thức cổ điển

1.2.1 Bất đẳng thức AM-GM

Định lí 1.2 (Xem [3]-[4])**.** Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm, khi đó ta luôn có

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Hệ quả 1.1. Với mọi số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta có

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Hệ quả 1.2. Với mọi số thực a, b, c, ta luôn có

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a + b + c)^2}{3}$
3. $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
4. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$
5. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

1.2.2 Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Định lí 1.3 (Xem [3]-[4])**.** Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực tùy ý thì

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right). \quad (1.1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dots = \dfrac{a_n}{b_n}$ (ở đây ta sử dụng quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).

Nhận xét 1.1. Theo bất đẳng thức (1.1) chọn $a_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ và $b_i = \sqrt{y_i}$ với $x_i, y_i \in \mathbb{R}, y_i > 0$. Ta thu được bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức (hay còn gọi là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng Engel).

Hệ quả 1.3. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là các số thực dương thì

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dots = \dfrac{x_n}{y_n}$.