ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẰNG

VỀ SỰ TỒN TẠI LỤC GIÁC LỒI RỖNG TRONG BÀI TOÁN ERDŐS

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẰNG

VỀ SỰ TỒN TẠI LỤC GIÁC LỒI RỖNG TRONG BÀI TOÁN ERDŐS

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN-2015

Mục lục

Mở đầu

Giả thuyết Erdős-Szekeres được đề cập từ rất sớm (vào năm 1935): Mọi tập không ít hơn $2^{n-2}+1$ điểm trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng) đều chứa n điểm là đỉnh của một đa giác lồi.
Bất chấp sự cố gắng của hàng trăm nhà toán học đã nghiên cứu và viết hàng trăm bài báo, giả thuyết Erdős-Szekeres mới chỉ được chứng minh trọn vẹn cho các trường hợp $n = 3, 4, 5$. Gần đây, năm 2006, trường hợp $n = 6$ đã được chứng minh bởi Szekeres và Peters nhờ máy tính. Sau đó, năm 2009, ba nhà toán học là Knut Dehnhardt, Heiko Harboth và Zsolt Lángi đã đưa ra một chứng minh thuần túy toán học cho một trường hợp riêng của trường hợp $n = 6$.
Năm 1978, Erdős đã phát biểu một bài toán mới, đó là bài toán Erdős về đa giác lồi rỗng: Cho n là một số tự nhiên bất kỳ, tồn tại hay không số nguyên dương nhỏ nhất $E(n)$ sao cho từ mọi tập chứa tối thiểu $E(n)$ điểm ở vị trí tổng quát trên mặt phẳng đều có thể chọn ra được n điểm là đỉnh của một đa giác lồi rỗng.
Bài toán này đã thu hút nhiều nhà nghiên cứu hình học tổ hợp trên thế giới. Ngay sau đó, cũng vào năm 1978, Harborth đã chứng minh $E(5) = 10$. Năm 1983, với mọi n, Horton đã xây dưng tập mà với $n \geq 7$ không thể lấy ra được đa giác lồi rỗng 7 đỉnh. Như vậy,chỉ còn lại trường hợp $n = 6$. Năm 2003, Overmars đã chứng minh nếu, $E(6)$ tồn tại thì $E(6) \geq 30$.
Năm 2008, Koselev đã Chứng minh định lý: mọi tập với tối thiểu 463 điểm ở vị trí tổng quát trên mặt phẳng đều chứa 6 điểm tạo thành lục giác lồi rỗng.
Luận văn có mục đích trình bày chứng minh công thức $E(6) \leq 463$ theo bài báo của Koselev [20]. Để làm rõ bức tranh toàn cục, Luận văn cũng trình bày tổng quan về bài toán Erdős về đa giác lồi rỗng.
Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Tổng quan về bài toán Erdős về đa giác lồi rỗng.
Chương 2: Chứng minh đánh giá $E(6) \leq 463$ của Koselev.
Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Duy Phượng. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình tập dượt nghiên cứu và viết luận văn.
Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô giáo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học Việt Nam đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ để tôi hoàn thành khóa học.
Cuối cùng xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đã động viên, giúp đỡ, khích lệ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015

Nguyễn Thị Hằng

Chương 1

Tổng quan bài toán Erdős về đa giác lồi rỗng

1.1 Giới thiệu và xây dựng kết quả chính

Năm 1935 Erdős-Szekeres đã phát biểu bài toán sau đây.

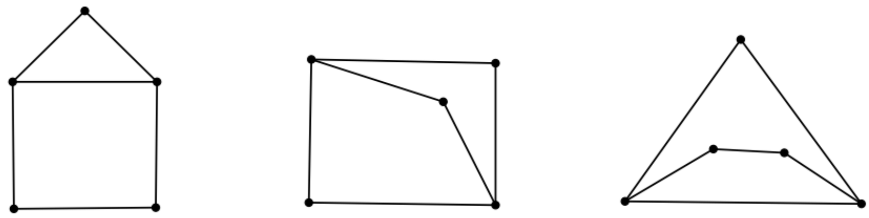
Bài toán 1*(Erdős-Szekeres) Cho số nguyên* $n \geq 3$*, hãy tìm một số nguyên dương nhỏ nhất* $g(n)$ *sao cho từ một tập hợp bất kỳ các điểm trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát và chứa tối thiểu* $g(n)$ *điểm thì có thể chọn ra một tập hợp con có* n *điểm là đỉnh của một đa giác lồi* n *cạnh.*

Năm 1978 Erdős đã phát biểu một dạng khác của bài toán trên.

Bài toán 2 *(Erdős-Szekeres) Cho số nguyên bất kì* $n \geq 3$*, hãy tìm số nguyên dương nhỏ nhất* $h(n)$ *sao cho từ mọi tập điểm* X *trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát và chứa tối thiểu* $h(n)$ *điểm có thể chọn ra một tập hợp gồm* n *điểm mà các phần tử của nó là đỉnh của một* n *giác lồi và rỗng. Nghĩa là* n *giác lồi này không chứa một điểm nào bên trong* X*.*

Ta nhắc lại tập các đỉnh trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát nếu như không có ba điểm nào nằm trên một đường thẳng. Cả hai bài toán đều là những bài toán điển hình trong hình học tổ hợp và lý thuyết Ramsey (xem [5], [6], [7]).
Bài toán thứ nhất Erdős-Szekeres đã xét trong bài báo [2]. Erdős-Szekeres

đã chứng minh rằng tồn tại $g(n)$ với n bất kì và được dựa trên đánh giá trên $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix} + 1$ và cũng đưa ra một giả thuyết $g(n) = 2^{n-2} + 1$. Giả thuyết này đã được khẳng định cho $n \leq 6$. Ở đây trường hợp $g(n) = 3$ là hiển nhiên. Trường hợp $g(4) = 5$ đã được chứng minh bởi Klein năm 1935 (xem trong Hình 1 trong đó biểu thị tất cả khả năng phân bố các điểm trên mặt phẳng). Mệnh đề $g(5) = 9$ đã được Ender Makai chứng minh. Tuy nhiên, có vẻ như Makai mới chỉ ra phản ví dụ nói rằng $g(5) \geq 9$. Mệnh đề $g(5) = 9$ đã được chứng minh bởi Đoàn Hữu Dũng 1967 [1]. Mệnh đề $g(6) = 17$ đã được khẳng dịnh bởi Szekeres và Peter năm 2006. Ngoài ra năm 1961, Erdős-Szekeres đã chứng minh đánh giá dưới $g(n) \geq 2^{n-2} + 1$.



Hình 1: Mọi tập hợp từ năm điểm đều chứa tứ giác lồi

Bất đẳng thức $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix} + 1$ đã được nhiều lần làm tốt lên. Đã có ba kết quả liên tiếp vào năm 1998. Kết quả đầu tiên thuộc về hai vợ chồng F.Chung và R.Graham: $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix}$ (xem [9]). Kết quả thứ hai thuộc về Kleitman và Pachter là $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-4 \\ n-2 \end{pmatrix} + 7 - 2n$ (xem [10]). Và cuối cùng đánh giá tốt thứ ba thì thuộc về Tóth và Valtr $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-5 \\ n-3 \end{pmatrix} + 2$ (xem [11]). Trong năm 2005 thì Tóth và Vailtr thay đánh giá trên bằng đánh giá $g(n) \leq \begin{pmatrix} 2n-5 \\ n-3 \end{pmatrix} + 1$ với $(n \geq 5)$ tốt hơn một đơn vị (xem [12]) và đây cũng là đánh giá tốt nhất cho tới nay. Như vậy giả thuyết Erdős-Szekeres chưa được chứng minh cũng chưa có phản ví dụ.

Bài toán 2 được nghiên cứu tương đối sâu hơn. Đẳng thức $h(3) = 3$ và $h(4) = 5$ là hiển nhiên (xem Hình 1). Đánh giá $h(5) = 10$ đã được chứng minh bởi Harborth 1978 (xem [13]). Năm 1983 Horton đã chứng

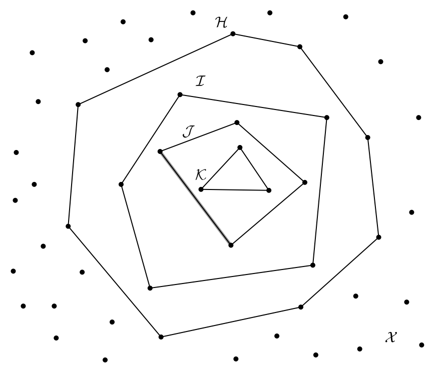
minh rằng $h(n)$ không tồn tại khi $n \geq 7$ (xem [14]). Mãi đến năm 2006 Gerken mới chứng minh được tồn tại của $h(6)$ và chứng minh bất đẳng thức $h(6) \leq g(9) \leq \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 = 1717$ (xem [15]). Và tất cả những đánh giá dưới cho $h(6)$ đã chứng minh được bằng máy tính. Đánh giá dưới đầu tiên thuộc về Overmars và Scholten năm 1988, đó là $h(6) \geq 27$ (xem [16]). Đánh giá tiếp theo năm 2001 cũng bởi Overmars và cũng là đánh giá tốt nhất hiện nay $h(6) \geq 30$ (xem [17]). Sai khác giữa đánh giá trên và đánh giá dưới là quá lớn. Làm giảm đánh giá này là một bài toán khó. B.A.Koselev đã chứng minh định lý sau đây.
Định lí 1. (Koselev, [20], 2008) Ta có bất đẳng thức

$$h(6) \leq \max\{g(8), 400\} \leq 463.$$

Lịch sử của bài toán Erdős-Szekeres có thể xem trong bài báo tổng quan của Soltan [5].

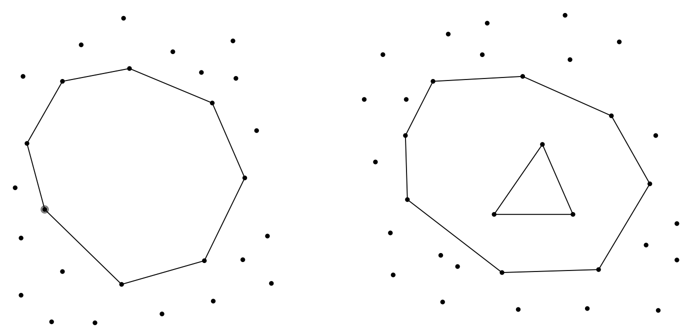
1.2 Phương pháp chứng minh

Ta nói rằng một tập hữu hạn điểm trên mặt phẳng chỉ chứa k-giác đã cho nếu như từ tập đó có thể chọn được tập hợp k điểm là các đỉnh của một k-giác.



Hình 2: Định nghĩa các tập H, I, J, K

Để chứng minh Định lý 1 cần khẳng định rằng trong một tập hợp bất kì trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát mà có số điểm lớn hơn hoặc bằng 463 thì phải tồn tại lục giác lồi rỗng. Ta cố định một tập điểm bất kì, ta nhận xét rằng tập điểm X chứa tối thiểu X một bát giác lồi. Quan hệ bao hàm trong tập hợp tất cả các bát giác lồi tạo nên tập hợp X là một quan hệ chặt. Bởi vậy luôn luôn có thể nói về các bát giác nhỏ nhất kể các điểm từ trong X. Chọn một trong chúng và kí hiệu tập đỉnh của chúng là tập H. Kí hiệu $I' = (conv(H)\backslash H) \cap X$ là tập tất cả các điểm của X nằm bên trong bao lồi của H. Hoặc I' là rỗng (khi đó ta có bát giác rỗng). Hoặc là $conv(I')$ chứa đa giác lồi là một đoạn (2-giác) hoặc là một điểm (1-giác). Ta kí hiệu I là tập tất cả các đỉnh ($I = \partial(conv(I')) \cap X$). Nếu $|I| > 2$ thì có thể xây dựng $J' = (conv(I)\backslash I) \cap X$ như là tập hợp tất cả các điểm của X mà nằm bên trong bao lồi của I. Nhận xét rằng nếu $J' \neq 0$ thì $conv(J')$ cũng là đa giác lồi (có thể là 1-giác hoặc 2-giác), bởi vậy thì ta có thể xây dựng J như là tập hợp tất cả các đỉnh của nó. Tương tự xây dựng tập K, L và quá trình này sẽ kết thúc sau hữu hạn bước.



Hình 3: Tập hợp dạng (8,0,0,...) và (8,3,0,...)

Đặt $i = |I|$ và $j = |J|$, ... Ta nói rằng tập X có dạng $(8, i, j, ...)$. Trong trường hợp suy biến thì xuất hiện dạng $(8, 0, 0, ...)$, $(8, i, 0, ...)$, ...(xem Hình 3).