ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẬU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HẬU

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Lời đầu tiên của khóa luận này, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới người thầy kính mến TS. Nguyễn Văn Ngọc, đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô giáo khoa Toán, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học, những người đã trực tiếp giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường cùng toàn thể bạn bè và người thân đã đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và trong khuôn khổ của luận văn thạc sỹ nên bản luận văn mới chỉ trình bày được một phần nào đó. Do thời gian có hạn và năng lực có phần hạn chế nên chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, ngày................tháng.........năm 2015

Tác giả

Nguyễn Thị Hậu

Danh mục các kí hiệu

Giả sử tam giác ABC có:

- $BC = a, CA = b, AB = c$;
- S là diện tích tam giác;
- p là nửa chu vi tam giác;
- $m_a, m_b, m_c, l_a, l_b, l_c, h_a, h_b, h_c$ lần lượt là độ dài các trung tuyến, các phân giác và các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c;
- r, R, r_a, r_b, r_c lần lượt là các bán kính đường tròn nội tiếp, đường tròn ngoại tiếp, đường tròn bàng tiếp với các cạnh a, b, c của tam giác ABC.
- $\sum a = a + b + c$.
- $\Pi a = abc$.

Danh mục các hình

Lời mở đầu

Bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức hình học nói riêng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực của toán học. Chúng có một số đặc tính thú vị và nhiều ứng dụng. Bất đẳng thức hình học thường khó có thể giải quyết được và không phải lúc nào cũng tìm được lời giải đẹp. Hiện nay đã có một lượng đáng kể tài liệu bằng tiếng Anh và tiếng Việt về các bất đẳng thức hình học. Nhận xét rằng, cũng đã có những luận văn về bất đẳng thức hình học, chẳng hạn [4]. Tuy nhiên, theo như chúng tôi được biết, tài liệu về phân loại các phương pháp chứng minh các bất đẳng thức hình học chưa có nhiều, ngoài ra chủ yếu là trong các tài liệu bằng tiếng Anh.

Vì những lý do trên đây chúng tôi đã chọn đề tài luận văn là **" Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức hình học"**. Tìm hiểu về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức hình học nói riêng là cần thiết vì nó giúp chúng ta giải pháp tiếp cận một bài toán nào đó, hoặc công cụ nghiên cứu một vấn đề nào đó.

Luận văn này trình bày một số phương pháp chứng minh các bất đẳng thức hình học mà có thể sử dụng để giải quyết các bài toán về bất đẳng thức hình học và cực trị từ cơ bản đến nâng cao thường xuất hiện trong các kỳ thi vào trường, thi học sinh giỏi khu vực hay quốc gia, quốc tế. Tuyển chọn và phân loại các bài toán về bất đẳng thức hình học theo đặc điểm phương pháp giải chúng.

Luận văn có bố cục: Mở đầu, ba chương nội dung chính, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Các phương pháp chứng minh thường dùng.
Chương này trình bày các bài toán giải bằng phương pháp thuần túy hình học, như bất đẳng thức tam giác, quan hệ giữa cạnh và góc của một tam giác và các bài toán giải bằng phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản của đại số, như bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, v.v..

Chương 2: Phương pháp ứng dụng hàm lồi.
Chương này trình bày khái niệm và các tính chất của hàm lồi và việc sử dụng hàm lồi để chứng minh bất đẳng thức hình học. Đặc biệt là hai định lí quan trọng được sử dụng rộng rãi trong chứng minh bất đẳng thức nói

chung và bất đẳng thức hình học nói riêng đó là bất đẳng thức Jensen và bất đẳng thức Karamata liên quan đến hàm lồi.

Chương 3: Phương pháp ứng dụng số phức.

Số phức xuất hiện từ thế kỷ XIX do nhu cầu phát triển tự nhiên của Toán học về giải các phương trình đại số, chẳng hạn phương trình $x^2+1 = 0$. Từ khi ra đời đến nay, số phức đã phát triển mạnh mẽ, thúc đẩy sự phát triển của Toán học, cũng như nhiều ngành Khoa học, Kỹ thuật khác.

Số phức được biểu thị bằng các điểm của mặt phẳng phức. Khoảng cách giữa hai điểm phức cũng chính là khoảng cách giữa hai điểm của không gian Euclid hai chiều có tọa độ là phần thực và phần ảo của điểm phức cùng vị trí. Mô đun (modul) của một số phức là độ dài của véc tơ có điểm gốc là gốc tọa độ, còn điểm ngọn là điểm phức. Vì vậy, giữa số phức và hình học có mối quan hệ mật thiết. Số phức là công cụ hữu hiệu giải nhiều bài toán, đặc biệt là các bất đẳng của thức hình học phẳng.

Nội dung chính của chương là trình bày các bài toán chứng minh bất đẳng thức hình học bằng phương pháp số phức như bất đẳng thức tam giác mở rộng, bất đẳng thức Ptolemy, bất đẳng thức Hyashi và các bất đẳng thức trong tam giác có trọng khác. Kỹ thuật chủ yếu trong phương pháp này là áp dụng bất đẳng thức tam giác mở rộng cho các đồng nhất thức. Học sinh bậc THPT mới được làm quen với số phức, thực hiện các phép toán về số phức còn chưa được thuần thục, nên việc áp dụng số phức vào hình học là một việc rất khó.

Chương 1

Các phương pháp chứng minh thường dùng

Chương này trình bày các bài toán giải bằng phương pháp thuần túy hình học, như bất đẳng thức tam giác, quan hệ giữa cạnh và góc của một tam giác và các bài toán giải bằng phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cơ bản của đại số, như bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, v.v.. Nội dung chủ yếu của chương này được hình thành từ các tài liệu [1, 2, 5, 11 - **??**, 7].

1.1 Phương pháp thuần túy hình học

1.1.1 Một số định lý cơ bản

Trong mục này tác giả trình bày một số định lý cơ bản của hình học phẳng. Nội dung cơ bản của mục này được trích ra từ tài liệu [1].

Định lý 1.1. (Bất đẳng thức tam giác). *Trong mọi tam giác chiều dài một cạnh luôn nhỏ hơn tổng chiều dài của hai cạnh còn lại. Tổng quát hơn, cho ba điểm A, B, C ta có:*

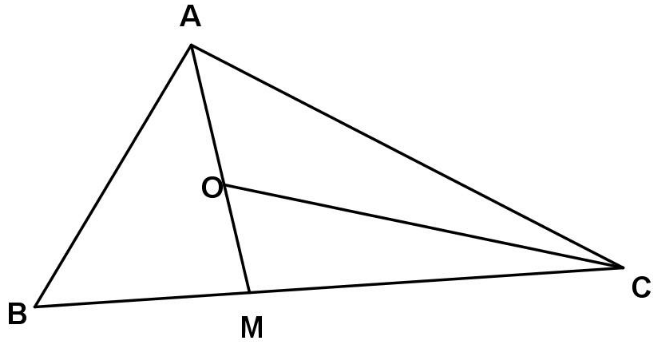
$$AC + BC \geqslant AB$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi C nằm trên đoạn AB.

Đây là một trong những bất đẳng thức hình học cơ bản nhất. Trong phần này chủ yếu đưa ra các bài toán được giải quyết nhờ sử dụng bất đẳng thức đơn giản này.

Định lý 1.2. *Giả sử O là điểm bên trong tam giác ABC (Điểm O có thể nằm trên cạnh, nhưng không trùng với bất kỳ đỉnh nào của tam giác ABC). Khi đó có bất đẳng thức*

$$AO + OC < AB + BC. \tag{1.1}$$



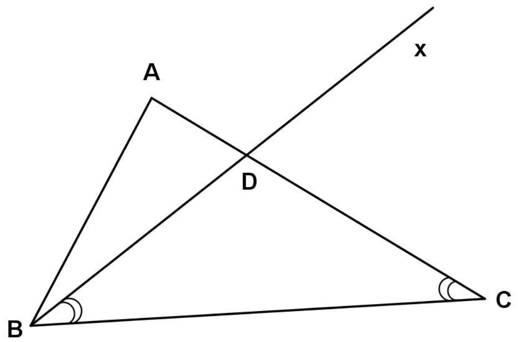
Hình 1.1

Chứng minh. Ký hiệu M là giao điểm của AO với BC. Sử dụng kép bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned} AO + OC &< AO + OM + MC = AM + MC \\ &< AB + BM + MC = AB + BC. \end{aligned}$$

và ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 1.3. *Trong một tam giác ứng với góc lớn hơn là cạnh dài hơn và ngược lại.*



Hình 1.2

Chứng minh. Xét tam giác ABC. Giả sử $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$, ta chứng minh $AC > AB$ và ngược lại. Thật vậy, trong góc $\widehat{ABC}$ kẻ tia Bx,cắt cạnh AC ở D sao cho $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$. Ta có $BD = DC, BD + DA = AC > AB$.

Ngược lại, giả sử $AC > AB$, ta sẽ chứng minh $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Thật vậy, giả sử $\widehat{ABC} \leq \widehat{ACB}$. Khi đó theo chứng minh trên ta có $AC \leq AB$, mâu thuẫn. Định lý được chứng minh. □

Định lý 1.4. *Cho trước hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có hai cặp cạnh bằng nhau $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Ta có bất đẳng thức $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$ khi và chi khi $BC > B'C'$.*