ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THANH VÂN

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ DÃY VÀ CHUỖI SỐ THỰC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THANH VÂN

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ DÃY VÀ CHUỖI SỐ THỰC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên - 2015

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Ngọc. Thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo để tôi có thể hoàn thành luận văn này, tôi xin được gửi tới Thầy lòng biết ơn sâu sắc.

Tôi xin được cảm ơn Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã cho tôi cơ hội được học tập và hoàn thành chương trình cao học dưới sự giảng dạy nhiệt tình, tâm huyết của các thầy, cô giáo.

Tôi xin cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng và Trường Trung học phổ thông Hồng Bàng, nơi tôi công tác đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Cuối cùng xin được cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi để hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Học viên

Nguyễn Thị Thanh Vân

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp với đề tài *" Một số bài toán nâng cao về dãy và chuỗi số thực "* là do tôi thực hiện, không sao chép và không trùng lặp về nội dung với bất kỳ tài liệu nào cùng chủ đề. Các tài liệu mà tôi tham khảo trong quá trình hoàn thành Luận văn này được trích dẫn đầy đủ.

Học viên

Nguyễn Thị Thanh Vân

Mục lục

Lời cảm ơn i

Lời cam đoan ii

Mục lục iii

Mở đầu 1

1 Một số bài toán nâng cao về dãy số **3**

1.1 Các khái niệm cơ bản về dãy số. Các dãy số đặc biệt 3

1.1.1 Khái niệm cơ bản về dãy số 3

1.1.2 Các dãy số đặc biệt 4

1.2 Một số kỹ thuật nghiên cứu dãy số lặp 6

1.2.1 Dẫn luận 6

1.2.2 Kỹ thuật phương trình sai phân 7

1.2.3 Kỹ thuật lượng giác hóa và kỹ thuật phương trình đại số 13

1.2.4 Kỹ thuật tuyến tính hóa dãy lặp phi tuyến 15

1.3 Một số bài toán nâng cao tìm số hạng tổng quát của dãy số . . 19

1.3.1 Dẫn luận 19

1.3.2 Một số bài toán 19

1.4 Giới hạn của các dãy số 24

1.4.1 Lý thuyết tóm tắt 24

1.4.2 Một số bài toán 25

1.5 Các tính chất của dãy số 43

2 Một số bài toán liên quan đến chuỗi số 50

2.1 Các khái niệm cơ bản về chuỗi số 50

2.1.1 Khái niệm cơ bản 50

2.1.2 Chuỗi hội tụ 51

2.1.3 Các phép toán của chuỗi hội tụ 52

2.2 Hội tụ của các chuỗi số dương 52

2.2.1 Tiêu chuẩn so sánh hơn thua 52

2.2.2 Tiêu chuẩn so sánh tỷ lệ 52

2.2.3 Tiêu chuẩn D' Alembert 53

2.2.4 Tiêu chuẩn Cauchy 53

2.2.5 Tiêu chuẩn tích phân 53

2.2.6 Tiêu chuẩn Raabe 53

2.2.7 Tiêu chuẩn Gauss 54

2.2.8 Một số chuỗi dương đặc biệt 54

2.3 Chuỗi có dấu bất kỳ và chuỗi đan dấu 55

2.3.1 Chuỗi có dấu bất kỳ 55

2.3.2 Chuỗi đan dấu 55

2.4 Một số bài toán về tính toán hoặc đánh giá các chuỗi 56

2.4.1 Tìm tổng của các chuỗi 56

2.4.2 Đánh giá các chuỗi 60

2.5 Các bài toán về tính hội tụ của các chuỗi số 64

Kết luận 76

Tài liệu tham khảo 77

Mở đầu

Dãy số và giới hạn của dãy số là chuyên mục quan trọng của Giải tích Toán học được dạy ở bậc Trung học Phổ thông. Các bài toán về dãy số có sức hấp dẫn mạnh mẽ nhờ vẻ đẹp và tính độc đáo của các phương pháp và kỹ thuật giải các bài toán khác nhau về dãy số.

Các vấn đề cơ bản của dãy số bao gồm: xác định số hạng tổng quát, tìm giới hạn và một số tính chất, như tính bị chặn, tính đơn điệu, tính nguyên v.v..

Các bài toán về dãy số thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp, nhất là cấp Quốc gia và Quốc tế. Vì thế, việc tìm hiểu và học hỏi nâng cao về dãy số và các bài toán liên quan là cần thiết trong việc học tập và giảng dạy Toán học ở bậc Phổ thông.

Một vấn đề Toán học khác có liên quan mật thiết với dãy số, đó là chuỗi số (tổng vô hạn). Theo định nghĩa, chuỗi số là giới hạn của dãy số dạng tổng $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, trong đó $\{a_k\}$ là dãy số vô hạn cho trước. Trong Giải tích 11 đã có giới thiệu qua về tổng vô hạn, đó là tính tổng vô hạn các số hạng của một cấp số nhân có công bội với trị tuyệt đối nhỏ hơn 1. Các vấn đề về xét tính hội tụ của chuỗi cũng như tính toán hay đánh giá các tổng vô hạn rất thú vị và có nhiều ứng dụng thực tiễn. Vì thế, chuỗi số thực cũng là đối tượng được đề cập trong luận văn này.

Mục tiêu của luận văn này nhằm đề cập đến một số vấn đề cơ bản của dãy số và chuỗi số thông qua các phương pháp giải các bài toán về dãy và chuỗi số mà đa phần ở mức nâng cao hoặc khó. Nội dung của luân văn này được hình thành chủ yếu từ tài liệu [6].

Luận văn có bố cục: Mở đầu, hai chương nội dung chính, Kết luận và Tài

liệu tham khảo.

Chương 1: Một số bài toán nâng cao về dãy số: gồm các khái niệm cơ bản về dãy số, hệ thống một số bài toán về dãy số với bài toán về dãy số lặp, bài toán nâng cao tìm số hạng tổng quát của dãy số, bài toán tìm giới hạn của dãy số, bài toán sử dụng các tính chất của dãy số.

Chương 2: Một số bài toán liên quan đến chuỗi số: gồm các khái niệm cơ bản về chuỗi số, hệ thống một số bài toán về chuỗi số như tính toán và đánh giá chuỗi số, bài toán về tính hội tụ của các chuỗi số dương.

Để hiểu và trình bày vấn đề một cách dễ dàng, tôi đã trình bày đầy đủ các khái niệm cơ bản, giải tường minh các bài toán miêu tả. Đặc biệt làm sáng tỏ các khái niệm và các kết quả, các bài toán được tính toán cẩn thận, đầy đủ và chi tiết. Các tính toán này thường không được trình bày trong các tài liệu trích dẫn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Học viên

Nguyễn Thị Thanh Vân

Chương 1

Một số bài toán nâng cao về dãy số

Chương này trình bày những khái niệm cơ bản của dãy số và những kỹ thuật thông dụng nghiên cứu dãy số truy hồi, đó là kỹ thuật phương trình sai phân, kỹ thuật lượng giác hóa và kỹ thuật tuyến tính hóa. Những kiến thức này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [2], [3] và [4]. Các bài toán nâng cao trình bày trong chương này (các mục 1.3, 1.4 và 1.5) được hình thành chủ yếu từ tài liệu [6].

1.1 Các khái niệm cơ bản về dãy số. Các dãy số đặc biệt

1.1.1 Khái niệm cơ bản về dãy số

Định nghĩa 1.1. Cho A là một tập con khác rỗng của tập số nguyên dương $\mathbb{Z}_+$ (hoặc tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$). Dãy số là một hàm số từ A vào $\mathbb{R}$. Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là $a_n, b_n, x_n, y_n, u_n, v_n, ...$ Dãy số thường được ký hiệu là (x_n) hoặc $\{x_n\}$.

Định nghĩa 1.2. Dãy số (u_n) được gọi là tăng (tăng không ngặt, giảm, giảm không ngặt), nếu $u_n < u_{n+1}$ $(u_n \leq u_{n+1}, u_n > u_{n+1}, u_n \geq u_{n+1})$.

Định nghĩa 1.3. Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên, nếu tồn tại số M, sao cho $u_n \leq M, \forall n$. Dãy được gọi là bị chặn dưới, nếu tồn tại số m, sao cho $u_n \geq m, \forall n$. Dãy số được gọi là bị chặn, nếu tồn tại các số M, m, sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n$.

1.1.2 Các dãy số đặc biệt

1. Cấp số cộng

Định nghĩa 1.4. Dãy số $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$, được gọi là cấp số cộng, nếu bắt đầu từ số hạng thứ hai, số đứng sau bằng số đứng liền trước cộng với một số không đổi d. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng. Vậy ta có

$$u_{n+1} = u_n + d \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = d.$$

Tính chất. Mỗi số hạng của một cấp số cộng là trung bình cộng của hai số hạng kề với nó:

$$u_k = \frac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2}.$$

Công thức số hạng tổng quát. Giả sử $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ là cấp số cộng với công sai d. Khi đó số hạng thứ n được tính theo công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \Big(\frac{u_1 + u_n}{2}\Big)n = \Big(\frac{2u_1 + (n-1)d}{2}\Big)n.$$

2. Cấp số nhân