ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HÒA

MỘT SỐ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN TRONG HÌNH HỌC VÀ VẬT LÝ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, Năm 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU HÒA

MỘT SỐ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN TRONG HÌNH HỌC VÀ VẬT LÝ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

Thái Nguyên, Năm 2015

Lời cảm ơn

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với TS. Nguyễn Văn Ngọc, thầy đã tận tình hướng dẫn và chỉ bảo cho em trong suốt quá trình làm luận văn này.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Trường Đại Học Khoa Học, các thầy cô giáo, các phòng chức năng của trường đã tạo cho tác giả mọi điều kiện tốt nhất trong quá trình học tập tại trường.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn chân thành tới bạn bè, các bạn học viên trong lớp cao học toán K7b đã động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập cùng nhau.

Cuối cùng tác giả xin bày tỏ sự biết ơn vô hạn đối với cha mẹ, các anh chị em và người thân trong gia đình mình đã động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015
Học viên
Nguyễn Thu Hòa

Mục lục

Mở đầu

Trong luận văn này chúng ta sẽ giải thích định nghĩa của tích phân xác định của hàm thực xác định trên một khoảng compăc. Ta có cái nhìn gần hơn về các loại hàm có thể lấy tích phân và ta trình bày phân tích định tính của hàm khả tích, theo cách chính xác hơn so với tính toán thông thường. Tích phân được định nghĩa và nghiên cứu ở đây được biết đến với tên *tích phân Riemann*.

Cauchy (1823) miêu tả một cách nghiệm ngặt tích phân của hàm liên tục như giới hạn của một tổng. Riemann (1854), chỉ đơn thuần là một phần bên ngoài trong luận án nổi tiếng của ông về chuỗi lượng giác, định nghĩa tích phân cho các hàm tổng quát hơn. Trong phần tiếp theo chúng ta miêu tả ngắn gọn lý thuyết tích phân Riemann và mở rộng của nó bởi Bois-Reymond và Darboux. Lý thuyết tổng quát hơn của Lebesgue (1902) không được khảo sát ở đây.

Trong định nghĩa của tích phân xác định đã sử dụng tiếp cận tính diện tích của một hình phẳng cũng như tính khối lượng của một vật phẳng khi biết hàm mật độ khối. Vì thế, tích phân xác định từ nội tại đã có những ứng dụng Hình học và Vật lý.

Ứng dụng tích phân trong hình học, như tính diện tích của một hình phẳng, tính thể tích của khối tròn xoay, độ dài đường cong phẳng, diện tích của mặt tròn xoay, v.v..đã được đề cập khá nhiều trong các sách giáo khoa, sách chuyên khảo nâng cao, cũng như trong các đề thi vào Đại học nhiều năm.

Vật lý học là môn khoa học thực nghiệm, các định luật, các công thức của Vật lý thường được xây dựng trên các biểu thức Toán học phù hợp với kết quả thực nghiệm. Việc sử dụng Toán học có hiệu quả trong việc giải các bài toán của Vật lý là việc rất khó đối với học sinh phổ thông, kể cả các học sinh khá, giỏi.

So với những ứng dụng của tích phân trong Hình học sơ cấp thì tài liệu giới thiệu về ứng dụng của tích phân giải các bài toán của Cơ học và Vật lý sơ cấp chưa có nhiều và khá sơ sài. *Vì vậy chúng tôi đã chọn đề tài về ứng dụng* *của tích phân trong Hình học, Cơ học và Vật lý làm Luận văn Thạc sĩ Khoa học.*

Theo chúng tôi được biết, đề tài trên đây cũng đã được đề cập trong Luận văn Thạc sĩ Khoa học [5], năm 2011. Tuy nhiên trong tài liệu này chỉ thấy trình bày lý thuyết tóm tắt của tích phân trong Hình học và Cơ học mà chưa thấy có các bài toán áp dụng, đặc biệt là các bài toán khó và các bài toán của vật lý sơ cấp.

Luận văn này gồm có; Mở đầu, ba chương nội dung, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày cơ sở lý thuyết của tích phân xác định Riemann. Kiến thức của chương này có thể tìm thấy trong bất kỳ tài liệu nào về phép tính vi phân và tích phân.

Chương 2 trình bày ứng dụng của phép tính tích phân trong Hình học. Nội dung của chương này dựa trên nhiều tài liệu, đặc biệt là các tài liệu [1], [4] và các đề tuyển sinh Đại học trong nhiều năm.

Chương 3 trình bày ứng dụng phép tính tích phân trong các bài toán của vật lý. Chương này là nội dung chính của luận văn. Mục 3.1 trình bày sơ đồ tổng quát áp dụng tích phân xác định vào các bài toán của cơ học và vật lý. Ngoài việc hiểu các kiến thức cần thiết của Vật lý còn phải biết Toán học hóa bài toán của Vật lý, như đưa vào các biến cần thiết, xét hệ tọa độ thích hợp. Vấn đề quan trọng trong ứng dụng phép tính tích phân là trước hết phải biết vi phân các đại lượng, sau đó dùng các định luật của Vật lý thiết lập các đại lượng vi phân nguyên tố, sau đó mới tích phân các đại lượng vi phân nguyên tố này, v.v..

Chương 1

Tích phân xác định

Chương này trình bày cơ sở lý thuyết của tích phân xác định Riemann. Kiến thức của chương này có thể tìm thấy trong bất kỳ tài liệu nào về phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến, đặc biệt là các tài liệu [1], [4].

1.1 Tích phân xác định và lớp hàm khả tích Riemann

1.1.1 Định nghĩa tích phân xác định

• Một *phân hoạch* của khoảng $[a, b]$ thành các khoảng con là tập hữu hạn các điểm

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

trong đó $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Một phân hoạch Δ' của $[a, b]$ được gọi là *sự làm mịn* của Δ nếu nó chứa tất cả các điểm của Δ, tức là $\Delta' \supset \Delta$.

• Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm tùy ý. Nếu $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, là một phân hoạch của $[a, b]$, khi đó một *cách lựa chọn* gắn với Δ là một lớp hữu hạn $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sao cho $\xi_{i-1} \leq \xi_i \leq \xi_{i+1}$ với $i = 1, \ldots, n$. Ta gắn với f, Δ và ξ *tổng Riemann* $S(f; \Delta, \xi)$ xác định bởi

$$S(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

• Ta nói rằng f là *khả tích Riemann* trên $[a, b]$ nếu tồn tại một số thực I với tính chất sau: với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch Δ của $[a, b]$ sao cho

$|S(f;\Delta,\xi) - I| < \varepsilon$, với mọi cách lựa chọn ξ gắn với Δ. Số I được gọi là tích phân của f trên $[a,b]$ và ký hiệu bằng $\int_a^b f(x)dx$. Như vậy, theo định nghĩa ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \tag{1.1}$$

Chú ý 1.1. *Tích phân xác định không phụ thuộc vào sự lựa chọn biến lấy tích phân:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt, ...$$

.

1.1.2 Lớp hàm khả tích Riemann

• Nếu tích phân xác định trên $[a,b]$ của hàm f tồn tại, thì ta nói hàm f khả tích trên [a, b]. Chúng ta có các lớp hàm sau khả tích trên đoạn [a, b]:

f(x) bị chặn và đơn điệu trên [a, b],

f(x) liên tục trên [a, b],

f(x) liên tục từng khúc chỉ có một số hữu hạn điểm
gián đoạn trên đoạn [a, b].

Đặc biệt, nếu ta thay đổi giá trị của một hàm khả tích tại hữu hạn điểm, thì hàm số vẫn khả tích và giá trị của tích phân không thay đổi. Hàm bị chặn có thể không khả tích. Để minh họa, xét hàm Dirichlet sau đây.

Ví dụ 1.1. Hàm Dirichlet được xác định bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Chúng ta sẽ chứng tỏ hàm f không khả tích trên bất kỳ khoảng $[a,b]$. Thật vậy, với bất kỳ phân hoạch $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ của $[a,b]$, mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ chứa cả số hữu tỷ và số vô tỷ. Do đó, tồn tại hai cách chọn ξ và ξ' gắn với Δ sao cho $S(f;\Delta,\xi) = b - a$ và $S(f;\Delta,\xi') = 0$. Do đó, f không khả tích trên $[a,b]$. Ta cũng chỉ ra rằng hàm này *gián đoạn toàn phần*, tức là gián đoạn tại mọi điểm.

• Trong phần tiếp theo chúng tôi miêu tả một phương pháp tiếp cận tính khả tích Riemann khác. Ta định nghĩa *tổng Darboux dưới* và t*ổng Darboux trên* gắn với $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ và cách chia $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ của $[a, b]$ là

$$S_-(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S^+(f;\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

trong đó

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i}, M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i}.$$

Khi đó $S_-(f;\Delta) \le S^+(f;\Delta)$, và ngoài ra, $S_-(f;\Delta) \le S(f;\Delta,\xi) \le S^+(f;\Delta)$, với cách chọn ξ gắn với cách chia Δ. Hơn nữa, nếu Δ' là phép làm mịn của Δ, thì

$$S_-(f;\Delta) \le S_-(f;\Delta') \le S_+(f;\Delta') \le S^+(f;\Delta),$$

nếu Δ_1 và Δ_2 là hai cách chia tùy ý, thì

$$S_-(f;\Delta_1) \le S^+(f;\Delta_2).$$

Điều này chỉ ra tập các tổng Darboux dưới của f bị chặn trên bởi mọi tổng Darboux trên và tập các tổng Darboux trên của một hàm nhất định được bị chặn dưới bởi bất kỳ tổng Darboux dưới. Do đó, ta khảo sát cận trên đúng của tổng Darboux dưới và cận dưới đúng của tổng Darboux trên. Ta định nghĩa *tích phân Darboux dưới*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{\Delta} S_-(f;\Delta)$$

và *tích phân Darboux trên*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_{\Delta} S_+(f;\Delta).$$

Các tiêu chuẩn tích phân sau là của Darboux

Định lý 1.1. *Một hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ khả tích khi và chỉ khi với bất kỳ $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho*

$$S_+(f;\Delta) - S_-(f;\Delta) < \varepsilon,$$

với mọi phân hoạch $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ với $\max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$.