ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————————

NGUYỄN TRUNG SỸ

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN TRUNG SỸ

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học

TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi (từ tháng 9 năm 2014 đến tháng 3 năm 2015), trên cơ sở nghiên cứu tham khảo các tài liệu, phân tích, tổng hợp và kinh nghiệm qua các năm công tác.

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Nguyễn Đình Bình.
Nhân dịp này tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với TS - người thầy đã truyền đạt nhiều kiến thức quý báu cùng với kinh nghiệm nghiên cứu khoa học trong suốt thời gian tác giả theo học và nghiên cứu đề tài.
Đồng thời, tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin, các thầy cô giảng dạy lớp Cao học K7N, Ban giám hiệu Trường THPT Lý Tự Trọng - Nam Định và gia đình đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập, công tác và thực hiện đề tài luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Trung Sỹ

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

- BĐT - Bất đẳng thức.
- AM - Arithmetic Mean.
- GM - Geometric Mean.
- HCF - Half Convex Function Theorem.
- IMO - International Mathematical Olympiad.
- MO - National Mathematical Olympiad.
- TST - Selection Test for International Mathematical Olympiad.
- ĐH - Đề thi Đại học.
- HSG - Học sinh giỏi.
- $I\left(a;b\right)$ hoặc $\mathbb{I}$ - Nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp con của $\mathbb{R}$

$$\left(a;b\right), \left[a;b\right), \left(a;b\right], \left[a;b\right].$$

- $\overrightarrow{A} \succ \overrightarrow{B}$ - Véctơ $\overrightarrow{A} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ với giả thiết $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ xa đều hơn $\overrightarrow{B} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ cũng với giả thiết $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, nếu $\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{cases}$

Mở đầu

Toán học là một môn học quan trọng trong chương trình phổ thông. Việc giảng dạy và học tập môn toán trong trường phổ thông không những nhằm trang bị cho học sinh những kiến thức cụ thể để áp dụng trong cuộc sống cũng như trong các môn học khác mà điều quan trong hơn là cung cấp và rèn luyện cho học sinh những kĩ năng, phương pháp môn học một cách tư duy của Toán học, điều cần thiết cho học sinh trong cả cuộc đời.

Chuyên đề bất đẳng thức có vị trí rất đặc biệt trong toán học, không chỉ là đối tượng nghiên cứu trọng tâm của đại số mà còn là công cụ đắc lực trong nhiều lĩnh vực của giải tích, hình học, lượng giác và ứng dụng.

Trong các kỳ thi thi học sinh giỏi Toán quốc gia, tuyển sinh đại hoc, cao đẳng và Olympic Toán sinh viên thì các bài toán liên quan đến bất đẳng thức luôn được đề cập và được xem như là những dạng toán thuộc loại khó, thuộc phân loại vận dụng ở mức độ cao.

Mặc dù trong quá trình giảng dạy học sinh và giáo viên đã được cọ sát rất nhiều nhưng khi gặp bài toán chứng minh bất đẳng thức chúng ta thường thấy lúng túng trong quá trình tìm ra cách giải, bởi vì có quá nhiều cách tiếp cận, cũng như phương pháp giải rất đa dạng và phong phú như phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển, phương pháp hàm số, phương pháp dồn biến, giảm biến, phương pháp phân tích thành tổng các bình phương (SOS), phương pháp hình học hóa, lượng giác hóa, phương pháp ABC...

Có thể nói, nghiên cứu về phương pháp sử dụng hàm số trong chứng minh bất đẳng thức là một đề tài đa dạng và thú vị, nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong nước cũng như trên thế giới, các đề tài không ngừng nảy sinh và có nhiều kết quả đẹp. Một số nghiên cứu trước đây như: "Một số bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu" của tác giả Nguyễn Thị Thu Hà; "Một số vấn đề về bất đẳng thức Jensen" của tác giả Võ Thị Nhật Vi; "Một số lớp bất đẳng thức dạng Karamata và áp dụng" của tác giả Mạc Văn Thư; .... Qua nghiên cứu, bản thân tác giả thấy những đề tài trên đều chỉ nghiên cứu vào một vấn để cụ thể.

Với suy nghĩ trên, mục tiêu chính của bản luận văn này trình bày một cách tổng quan, có hệ thống các kiến thức cơ sở, cách thức tiếp cận và phương pháp chứng minh bất đẳng thức trên quan điểm sử dụng hàm số.

Ngoài phần Mở đầu và Kết luận, luận văn được chia thành ba chương đề cập đến các vấn đề sau đây:

Chương 1 trình bày cơ sở lý luận và các kiến thức cần thiết cho đề tài.

Chương 2 trình bày các phương pháp sử dụng hàm số để chứng minh bất đẳng thức.

Các kiến thức trong luận văn này, được sự hướng dẫn của Giáo viên hướng dẫn tôi đã nghiên cứu, phân tích và tổng hợp từ các kiến thức của Giải tích cao cấp. Các bài tập minh họa được tổng hợp một cách hệ thống giúp cho giáo viên cũng như học sinh dễ dàng vận dụng vào quá trình dạy và học.

Chương 1

Cơ sở lý luận và các kiến thức cần thiết cho đề tài

Phương pháp hàm số có rất nhiều ứng dụng đặc biệt trong các dạng toán chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Trong chương này tác giả trình bày các định nghĩa, và chứng minh các tính chất, định lý, hệ quả là những kiến thức cơ bản của Toán học cao cấp được sử dụng trong luận văn này.

1.1 Tính chất của hàm số bậc nhất

Chúng ta bắt đầu từ một định lý đơn giản trong giải tích

Định lí 1.1. Hàm số bậc nhất $f(x) = ax + b\,(a \neq 0)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $a < 0$.

Nhận xét 1.1. ([5]) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ trên đoạn $[\alpha; \beta]$ là một đoạn thẳng có hai đầu mút là $A\,(\alpha; f(\alpha))$ và $B\,(\beta; f(\beta))$, do đó ta có các tính chất sau

Tính chất 1.1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \geq 0 \\ f(\beta) \geq 0. \end{cases}$

Tính chất 1.2. $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0. \end{cases}$

Tính chất 1.3. $\min\{f(\alpha); f(\beta)\} \leq f(x) \leq \max\{f(\alpha); f(\beta)\} \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$

1.2 Hàm số đồng biến, nghịch biến

Định nghĩa 1.1. ([4]) Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I\,(a;b) \subset \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

• Với mọi $x_1, x_2 \in I\,(a;b)$ và $x_1 < x_2$ ta đều có $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là hàm số đồng biến (hàm đơn điệu tăng thực sự) trên $I\,(a;b)$.

• Với mọi $x_1, x_2 \in I\,(a;b)$ và $x_1 < x_2$ ta đều có $f(x_1) > f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là hàm số nghịch biến (hàm đơn điệu giảm thực sự) trên $I\,(a;b)$.

Sử dụng định lý Lagrange đã biết trong chương trình Toán giải tích ta có định lý sau:

Định lí 1.2. ([4])Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$

i) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.

ii) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chứng minh. Lấy hai điểm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ trên khoảng $(a;b)$. Vì $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nên $f(x)$ liên tục trên $[x_1;x_2]$ và có đạo hàm trên khoảng $(x_1;x_2)$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $y = f(x)$ trên $[x_1;x_2]$, khi đó $\exists c \in (x_1;x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

i) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(c) > 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) > 0$ hay $f(x_2) > f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

ii) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(c) < 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) < 0$ hay $f(x_2) < f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Định lí 1.3 (Mở rộng của định lý 1.2)**.** ([4]) Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Nếu $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in (a;b)$ và đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng đó .

Chứng minh. Thậy vậy, để đơn giản cách lập luận, giả sử rằng $f'(x) \geq 0$ trên $(a;b)$ và $f'(x) = 0$ tại $x_1 \in (a;b)$ thì khi đó $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng