ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN VĂN ĐÔNG

ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN VĂN ĐÔNG

ÁP DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học

TS. NGUYỄN ĐÌNH BÌNH

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Hàm số đơn điệu là một khái niệm quan trọng trong giải tích toán học và có nhiều ứng dụng trong các ngành khoa học khác như kinh tế, cơ học, vật lý và kĩ thuật. Trong các kỳ thi học sinh giỏi cấp Quốc gia, Quốc tế, trong các kỳ thi Olympic Toán sinh viên giữa các trường đại học trong nước thì các bài toán liên quan đến tính đơn điệu của hàm số thường xuyên xuất hiện và dạng phổ biến nhất là ứng dụng định lí Rolle và một số mở rộng của định lí Rolle (Định lý Lagrange, định lý Cauchy, định lý Rolle trên môt khoảng không bị chặn) là các định lý quan trọng trong giải tích cổ điển. Ứng dụng của các định lý này trong toán sơ cấp rất đa dạng và phong phú, đặc biệt là các dạng toán về giải phương trình, giải hệ phương trình, chứng minh phương trình có nghiệm, xét cực trị của hàm số ...Tuy nhiên, trong các tài liệu dành cho học sinh phổ thông và một số nghiên cứu trước đây thì ứng dụng tính đơn điệu của hàm số trong giải phương trình, hệ phương trình chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Với suy nghĩ và theo ý tưởng đó, mục tiêu luận văn là nghiên cứu tính đơn điệu của hàm số trong toán cao cấp và ứng dụng của nó để giải các bài toán sơ cấp. Đặc biệt luận văn cũng định hướng cách giải và cách vận dụng các định lý đã biết để tìm tòi những lời giải hay, độc đáo đặc thù cho từng dạng toán cụ thể, từ đó hình thành ý thức sáng tạo những bài toán mới. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục hoàn thiện trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

2. Mục đích nghiên cứu đề tài

• Khai thác các tính chất đơn điệu, cực trị của hàm số trong giải tích toán học.

• Nâng cao năng lực giải các bài toán về giải phương trình và hệ phương trình bằng phương pháp hàm số.

• Xây dựng hệ thống bài tập phục vụ công tác giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

• Đối tượng nghiên cứu là tính đơn điệu của hàm số.

• Phạm vi nghiên cứu là tính đơn điệu của hàm số và ứng dụng trong giải phương trình, hệ phương trình.

4. Phương pháp nghiên cứu

• Phân tích và tổng hợp.

• Hệ thống và phân loại các bài tập.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

• Thể hiện được tính ứng dụng của toán cao cấp để giải các bài toán sơ cấp.

• Xây dựng, hệ thống phương pháp để giải các bài toán phương trình, hệ phương trình.

• Luận văn đóng góp thiết thực cho việc học và dạy các chuyên đề toán sơ cấp, đem lại niềm đam mê sáng tạo trong việc dạy và học toán.

6. Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm ba chương, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Nội dung chương này trình bày một cách cơ bản các định lý liên quan đến tính đơn điệu của hàm số là: Định lý Fermat, định lý Rolle, định lý Lagrange cùng một số hệ quả quan trọng trong giải tích toán học. Đây là phần lý thuyết cơ sở để xây dựng phương pháp và vận dụng cho các bài toán ứng dụng ở những chương sau.

Chương 2. Áp dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình.

Chương này trình bày một số ứng dụng trực tiếp của định lý Rolle, định lý Lagrange, định lý Cauchy và các hệ quả để xét sự tồn tại nghiệm của phương trình cho trước.

Chương 3. Áp dụng tính đơn điệu của hàm số để giải hệ phương trình.

Chương này trình bày ứng dụng định lý Lagrange, định lý Cauchy và các hệ quả để giải hệ phương trình. Các bài tập minh họa được lựa chọn từ đề thi của các kì thi học sinh giỏi Quốc gia, các kì thi Olympic khu vực và Quốc tế, các kì thi Olympic toán sinh viên.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học đầy nhiệt tình và nghiêm túc của TS. Nguyễn Đình Bình, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và kính trọng sâu sắc đối với TS - người thầy đã truyền đạt nhiều kiến thức quý báu cùng với kinh nghiệm nghiên cứu khoa học trong suốt thời gian tác giả theo học và nghiên cứu đề tài.

Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin, các thầy cô giảng dạy lớp Cao học K7N, Ban giám hiệu trường THPT Giao Thủy B - Nam Định đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên tác giả trong suốt quá trình học tập, công tác và thực hiện đề tài luận văn này.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã cố gắng học tập và nghiên cứu một cách nghiêm túc trong suốt khóa học. Tuy nhiên do còn hạn chế về năng lực, thời gian và hoàn cảnh nên trong quá trình thực hiện không tránh khỏi thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Tác giả

Nguyễn Văn Đông

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

- $\mathbb{N}$ - Tập các số tự nhiên.
- $\mathbb{N}^*$ - Tập các số tự nhiên khác 0.
- $\mathbb{Z}$ - Tập các số nguyên.
- $\mathbb{R}$ - Tập các số thực.
- ĐPCM - Điều phải chứng minh.
- THPT - Trung học phổ thông.
- ĐH - Đề thi Đại học.
- HSG - Học sinh giỏi.
- NXBGD - Nhà xuất bản Giáo dục.
- $I\left(a;b\right);\mathbb{I}$ - Nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp con của tập $\mathbb{R}$

$$\left(a;b\right),\left[a;b\right),\left(a;b\right],\left[a;b\right].$$

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Tính chất đồng biến, nghịch biến và tính lồi, lõm của hàm số là những vấn đề cơ bản trong chương trình toán sơ cấp. Định lý Lagrange đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh các định lý, tính chất cơ bản trong chương trình. Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số định lý quan trọng liên quan đến tính đơn điệu của hàm số đó là: Định lý Fermat, định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle (Định lý Lagrange, định lý Cauchy, định lý Rolle trên một khoảng không bị chặn). Một số hệ quả quan trọng cũng được trình bày để thuận lợi cho việc vận dụng giải các bài toán được trình bày trong hai chương tiếp theo.

1.1 Hàm đồng biến, nghịch biến

Từ đây về sau, ta sử dụng kí hiệu $I(a;b) \subset \mathbb{R}$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp $(a;b), [a;b), (a;b]$ và $[a;b]$ với $a < b$.

Định nghĩa 1.1. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a;b) \subset \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

• Với mọi $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a;b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a;b)$.

• Ngược lại, nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \geq f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a;b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) > f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a;b)$.

Những hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a;b)$ được gọi là hàm đồng biến trên $I(a;b)$ và hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a;b)$ được gọi là hàm nghịch biến trên $I(a;b)$.

Định nghĩa 1.2. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Khi đó:
i) $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là có cùng tính đơn điệu nếu $f'(x).g'(x) > 0$.
ii) $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là khác tính đơn điệu nếu $f'(x).g'(x) < 0$.

Trong chương trình giải tích, chúng ta đã biết đến các tiêu chuẩn để nhận biết được khi nào thì một hàm số khả vi cho trước trên khoảng $(a;b)$ là một hàm đơn điệu trên khoảng đó.

Sau đây chúng ta sẽ dùng định lý Lagrange để chứng minh định lý về điều kiện đủ của tính đơn điệu của hàm số. Đây là một định lý rất quan trọng trong chương trình giải tích lớp 12-THPT.

Định lí 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.
a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.
b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chứng minh. Lấy hai điểm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ trên khoảng $(a;b)$. Vì $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nên $f(x)$ liên tục trên $[x_1;x_2]$ và có đạo hàm trong khoảng $(x_1;x_2)$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $y = f(x)$ trên $[x_1;x_2]$, khi đó tồn tại $c \in (x_1;x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

a) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(c) > 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) > 0$ hay $f(x_2) > f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

b) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(c) < 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) < 0$ hay $f(x_2) < f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$.

Định lí 1.2. (Mở rộng của định lý 1.1). Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a;b). Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng $(a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng đó.

Chứng minh. Thật vậy, để đơn giản cách lập luận, giả sử rằng $f'(x) \geq 0$ trên $(a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại $x_1 \in (a; b)$ thì khi đó $f(x)$ đồng biến trong từng khoảng $(a; x_1)$ và $(x_1; b)$ và liên tục trong $(a; x_1]$ và $[x_1; b)$ nên nó cũng đồng biến trong $(a; x_1]$ và $[x_1; b)$. Từ đó suy ra nó đồng biến trên cả khoảng $(a; b)$.

1.2 Định lý Rolle và một số mở rộng

Cơ sở của định lý Rolle dựa vào định lý cơ bản nhất của Weierstrass đối với hàm liên tục khẳng định rằng khi f liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì nó phải đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó và định lý Fermat về điểm cực trị của hàm khả vi khẳng định rằng nếu hàm khả vi $g(x)$ trong khoảng $(a; b)$ đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại một điểm trong khoảng đó thì đạo hàm tại điểm đó bằng 0.

1.2.1 Định lý Rolle

Định lí 1.3. (Định lý Fermat) Cho hàm số $f(x)$ xác định liên tục trong khoảng đóng $[a; b]$, khi đó nếu $f(x)$ đạt cực trị tại $c \in (a, b)$ và nếu $f(x)$ khả vi tại c thì $f'(c) = 0$.

Định lí 1.4. (Định lí Rolle). Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm tại mọi $x \in (a, b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên theo định lý Weierstrass hàm f phải đạt giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trên đoạn $[a; b]$, tức là tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in (a, b)$ sao cho

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f(x) = m, f(x_2) = \max_{[a;b]} f(x) = M.$$

Có hai khả năng:

i) $m = M$. Khi ấy $f(x) = const$ trên đoạn $[a; b]$, do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ và c là điểm bất kì trên khoảng đó.

ii) $m < M$. Khi đó vì điều kiện $f(a) = f(b)$ nên ít nhất một trong hai điểm