ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

VŨ THỊ SƠN

ỨNG DỤNG NỘI SUY RBF VÀO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN TRUYỀN TẢI

LUẬN VĂN THẠC SĨ. CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Thái Nguyên - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

VŨ THỊ SƠN

ỨNG DỤNG NỘI SUY RBF VÀO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN TRUYỀN TẢI

Chuyên ngành: Công nghệ thông tin
Mã số: 60 48 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ. CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS ĐẶNG QUANG Á

Thái Nguyên - 2010

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU 2
CHƯƠNG 1 : NỘI SUY HÀM NHIỀU BIẾN BỞI HÀM RBF 4
1.1 XẤP XỈ HÀM BẰNG NỘI SUY 4
1.1 .1Bài toán nội suy. 4
1.1.2 Đa thức nội suy Lagrange 5
1.1.2.1 Xây dựng đa thức nội suy 5
1.1.2.2 Sai số nội suy 6
1.1.3 Đa thức nội suy với mốc cách đều. 7
1.3.1 Công thức tổng quát 8
1.1.3.2 Sai phân hữu hạn 8
1.1.3.3 Công thức nội suy Newton 9
1.2. XẤP XỈ BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU 9
1.2.1 Xấp xỉ thực nghiệm. 9
1.2.2 Xấp xỉ bằng đa thức 10
1.2.3 Xấp xỉ hàm khả tích 11
1.3 Tính gần đúng đạo hàm bằng đa thức nội suy 12
1.4. HÀM CƠ SỞ BÁN KÍNH VÀ CÁC TÍNH CHẤT 15
1.4.1 Hàm hàm cơ sở bán kính (Radial Basis Function networks) 15
1.4.2 Tính chất hàm bán kính (radial function): Hàm bán kính là hàm chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ đối số x đến một điểm c (gọi là tâm) cho trước. 15
1.4.3 hàm cơ sở bán kính (RBF): 16
1.4.4 Quá trình học của hàm: 21
CHƯƠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN TRUYỀN TẢI 23
2.1 Giới thiệu bài toán 23
2.2 Mô hình toán học 24
2.3. Mở rộng hàm RBF – Hàm RBF nhiều lớp cho phương trình khuếch tán truyền tải: 26
CH- ƠNG 3: GIẢI PH- ƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN - TRUYỀN TẢI BẰNG PH- ƠNG PHÁP KHÔNG L- ỚI 29
3.1. Bài toán khuếch tán truyền tải trong phương pháp lưới 29
3.2. Ph- ơng pháp không l- ới giải bài toán 30
3.2.1. Bài toán tổng quát 30
3.2.2. Bài toán khuyếch tán một chiều 33
MỘT SỐ KẾT QUẢ TÍNH TOÁN 37
KẾT LUẬN 40
PHỤ LỤC 41

MỞ ĐẦU

Ngày nay với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, con người đã ứng dụng những thành tựu của nó trong rất nhiều lĩnh vực khác nhau. Máy tính đã trở thành một công cụ hỗ trợ đắc lực cho con người trong việc xử lý dữ liệu một cách nhanh chóng và chính xác.

Từ khoảng hai chục năm nay người ta đã và đang phát triển một kỹ thuật nội suy mới có độ chính xác cao. Đó là nội suy bởi hàm cơ sở bán kính (Radial Basis Functions) viết tắt là RBF. Phương pháp nội suy này đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực của CNTT như xử lý tín hiệu, xử lý ảnh, đồ họa máy tính và lý thuyết điều khiển. Một số phần mềm về hàm RBF và các ứng dụng cũng đã được phát triển. Ngoài ra, một lĩnh vực ứng dụng khác rất hiệu quả của nội suy RBF là tính toán khoa học. Các kỹ thuật RBF được sử dụng ngày càng nhiều trong việc giải số phương trình đạo hàm riêng, đặc biệt là các bài toán phi tuyến và/hoặc các bài toán trong các miền hình học phức tạp. Lĩnh vực này được phát triển dựa trên nền tảng của hình học họa hình, hình học tính toán, hình học vi phân cùng nhiều kiến thức toán học của đại số và giải tích, cũng như các thành tựu của phần cứng máy tính.

Luận văn gồm có ba chương:

Chương 1. Nội suy hàm nhiều biến bởi hàm RBF

Khái niệm cơ bản về nội suy và xấp xỉ hàm số

Một số phương pháp nội suy hàm một biến

Nội suy hàm nhiều biến

Hàm cơ sở bán kính và các tính chất

Nội suy bởi hàm RBF

Chương 2. Phương trình khuyếch tán - truyền tải

Giới thiệu bài toán

Phương pháp sai phân giải phương trình khuyếch tán - truyền tải

Một số thí dụ tính toán

Chương 3. Giải phương trình khuếch tán - truyền tải bằng phương pháp không lưới

Chương trình MATLAB giải bài toán bằng phương pháp sai phân và phương pháp RBF

Em xin được bày tỏ lòng biết ơn đến thầy giáo **PGS.TS. Đặng Quang Á** đã tận tình hướng dẫn em hoàn thành luận văn này. Em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo, bạn bè, đồng nghiệp, Khoa Công nghệ Thông tin – Đại học Thái Nguyên đã động viên, giúp đỡ em trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 10 năm 2010

CHƯƠNG 1 : NỘI SUY HÀM NHIỀU BIẾN BỞI HÀM RBF

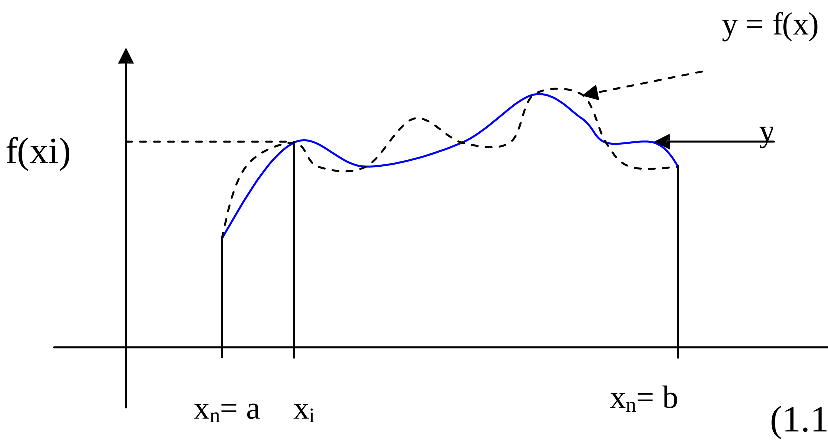
1.1 XẤP XỈ HÀM BẰNG NỘI SUY

1.1 .1Bài toán nội suy.

Giả sử chúng ta có hàm số y=f(x), và biết giá trị của nó tại các điểm $x_0 = a < x_1 < x_2 < .. < x_n = b$; $y_i = f(x_i)$ với $\forall i=0,..,n$. Hãy tìm biểu thức g(x) đủ đơn giản xácđịnh trên [a,b] sao cho: $y= f(x) \cong g(x)$ và $g(x_i) = y_i$

Hàm f(x) thường là hàm thực nghiệm hoặc hàm khó tính giá trị nên chỉ xác định giá trị tại một số điểm nhất định. Các điểm x_i (i=0,..,n) gọi là các mốc nội suy.

Về mặt hình học bài toán nội suy được diễn đạt như sau: Tìm hàm g(x) có đồ thị đi qua các điểm $(x_i, f(x_i))$



(1.1)

Lược đồ giải bài toán nội suy.

Người ta cố gắng tìm hàm $G(c_0, .., c_n, x)$ khá đơn giản, thỏa mãn một số điều kiện nhất định và phụ thuộc n+1 tham số c_i . Các tham số c_i này sẽ được xác định nhờ hệ phương trình sau:

$$G(c_0,..,c_n,x_k) = y_k \text{ với } k=0,..,n \qquad (1.2)$$

Thường người ta chọn hàm G có dạng:

$$G(c_0, c_1, ..., c_n, x) = \sum_{k=0} c_k \varphi_k(x) \qquad (1.3)$$

Trong đó các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ (k=0;n) là họ hàm độc lập tuyến tính cho trước và thỏa mãn điều kiện

$$|\ \varphi_k(x_i)\ | \neq 0 \qquad (1.4)$$

Khi đó hệ (2.2) là luôn giải được và có duy nhất nghiệm đối với c_i.

Các hàm $\{\varphi_k(x)\}$ (k=0;n) được chọn theo kinh nghiệm hoặc bằng hàm x^k để dễ tính toán

Với các c_i (i=0;n) tìm được, hàm $g(x) = G(c_0, .., c_n, x)$ gọi là hàm nội suy và dùng làm công thức để tính giá trị của hàm f(x) với các x trong đoạn[a,b].

1.1.2 Đa thức nội suy Lagrange

Lagrange đã xét trường hợp $\varphi_k(x) = x^k$, (k=0;n), khi đó hàm nội suy là đa thức bậc n. Còn định thức $|\ \varphi_k(x_i)\ |$ là định thức Vandermon nên khác không. Tuy vậy giải hệ (1.2) với n lớn vẫn rất khó khăn nên Lagrange đã xây dựng đa thức nội suy đơn giản sau.

1.1.2.1 Xây dựng đa thức nội suy

Ký hiệu $L_{(n)}(x)$ là đa thức nội suy cần tìm. Lagrange chọn đa thức này dưới dạng $L_{(n)} = \sum_{k=0}^{n} y(k) L_n^k(x)$ (1.5)

Trong đó $L_n^k(x)$ (k=0;n) là (n+1) đa thức bậc n có nghiệm x= x_i (với i $\neq$ k) và

$L_n^k(x)$ =1. Thấy

$$L_n^k(x) = \frac{\Pi(x - x_i)_{i\neq k}}{\Pi(x_k - x_i)_{i\neq k}} \quad (1.6)$$

Khi đó $L_n(x)$ là đa thức nội suy cần tìm.

Ví dụ: Giả sử với hàm y = f(x) ta đo được tại các điểm x_0, và x_1 tương ứng là $y_0 = f(_{x0})$ và y1 = f(x1) thì:

$L_1^0(x) = \dfrac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)}$

$L_1^1(x) = \dfrac{(x - x_0)}{(x_0 - x_1)}$

Từ 2.5 ta được

$L_1(x) = \dfrac{y0(x - x_1)}{xo - x_2} + \dfrac{y1(x - x_{0)}}{(x_1 - x_0)} = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Đây chính là đường thẳng đi qua 2 điểm (x_0,y_0) và (x_1,y_1).

Ví dụ: hàm y = f(x) đo được tại 4 điểm như sau:

x	0	1	2	3
x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	-0.5	0	0.2	1

Khi đó ta có:

$$L_3^0(x) = \frac{(x - 0.1)(x - 0.3)(x - 0.5)}{(-0.1)(-0.3)(-0.5)} = -\frac{x^3 - 0.9x^2 + 0.23x - 0.015}{0.015}$$

$$L_3^2(x) = \frac{x(x - 0.1)(x - 0.5)}{(0.3)(0.2)(-0.2)} = -\frac{x^3 - 0.6x^2 + 0.25x}{0.012}$$

$$L_3^3(x) = \frac{x(x - 0.1)(x - 0.3)}{(0.5)(0.4)(-0.2)} = -\frac{x^3 - 0.4x^2 + 0.03x}{0.04}$$

$$L_3^3(x) = \frac{x(x - 0.1)(x - 0.3)}{(0.5)(0.4)(0.2)} = -\frac{x^3 - 0.4x^2 + 0.03x}{0.04}$$

Vì y1= 0 nên không cần tính $L_3^1(x)$

$L(_3)$ = y0 $L_3^0(x) + y_2 L_3^2(x) + y_2 L_3^3(x) = \dfrac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \dfrac{73}{12}x - 0.5$ là đa thức nội suy cần tìm.

1.1.2.2 Sai số nội suy

Với $x \in [a,b]$ ta ước lượng sai số $f(x) - L_n(x)$, trong đó x cho trước.

Đặt $\omega_n(t) = (t-x_0)(t-x_1)..(t-x_n)$

Rõ ràng nếu x không bằng mốc nội suy thì $\omega_n(x) \neq 0$, nên tìm được hằng số k để:

$f(x) - L_n(x) = k.\omega_n(x)$ (1.7)

Xét hàm số: $F(t) = f(t) - L_n(t) - k.\omega_n(t)$ (1.8)

Hàm này có n+2 nghiệm phân biệt $t=x_i$ (i=0;n) và t=x; Bằng phương pháp quy nạp có thể chứng minh được rằng tồn tại điểm c $\in[a,b]$ sao cho $F^{(n+1)}(c)=0$. Vì L_n là đa thức bậc n nên có thể tính đạo hàm cấp (n+1) biểu thức (2.2). Ta có:

$F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - 0 - k\,(n+1)! = 0$

$k = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ (2.5)

Thay giá trị của k vào biểu thức (2.1) ta được

$f(x) - Ln(x) = f^{(n+1)}(c)\dfrac{\omega(c)}{(n+1)!}$ (1.9)

Điểm c thay đổi khi x thay đổi. Nếu đạo hàm cấp (n+1) của f bị chặn: $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ (2.7)

với $\forall x \in[a,b]$ thì ta có ước lượng sai số nội suy là:

$\left| f(x) - Ln(x) \right| \leq \dfrac{M}{(n+1)!} \left| \omega_n(x) \right|$ (1.10)

1.1.3 Đa thức nội suy với mốc cách đều.

Ta xét trường hợp đặc biệt khi các mốc nội suy cách nhau một đoạn bằng nhau:

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = (b-a)/n$ (với i=0; n –1)(2.9)

Dùng phép đổi biến $(x - x_0)/h = t$, các đa thức $L_n^k(x)$ sẽ là đa thức theo t chỉ phụ thuộc vào số mốc n và có nhiều cách biểu diễn đơn giản, dễ sử dụng hơn.

1.3.1 Công thức tổng quát

Đặt $\quad x - x_0 = h.t \qquad (1.11)$

Ta có: $\quad x - x_k = (t - k)\, h;\ \forall k=1\ ;\ n\ ;\ \ x_j - x_k = (j - k)\, h \qquad (1.12)$

Thay vào (1.6) ta được:

$$L_x^k(x) = P_n^k(t) = \frac{\prod_{i\neq k}(x - x_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)} = \frac{t(t-1)..(t-k+1)(t-k-1)..(t-n)}{(-1)^{n-k}k!(n-k)!}$$

Hay

$$P_n^k(t) = (-1)^{n-k}\frac{C_n^k}{n!}t(t-1)...(t-k+1)(t-k-1)..(t-n)$$

không phụ thuộc vào mốc nội suy. Tùy theo từng trường hợp người ta có các công thức hàm nội suy thích ứng.

1.1.3.2 Sai phân hữu hạn

Trong trường hợp các mốc nội suy cách đều $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = const$ với i=0,..,n-1. Các sai phân hữu hạn được định nghĩa như sau:

Sai phân cấp 1: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

Sai phân cấp 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

. . . .

Sai phân cấp k: $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$

Để tính sai phân hữu hạn bằng tay người ta thường dùng bảng như sau:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
$x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ $x_4\ x_5$	$y_0\ y_1\ y_2\ y_3$ y4 y5	Δy_0 Δy_1 Δy_2 Δy_3 Δy_4	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$ $\Delta^2 y_2$ $\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_0$ $\Delta^3 y_1$ $\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_0$ $\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$

Ví dụ với hàm $y=e^x$ ta có bảng sai phân với 4 mốc như sau: