ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN HÙNG CƯỜNG

TOÁN TỬ HỢP THÀNH TRÊN KHÔNG GIAN CÁC HÀM ĐIỀU HÒA BỊ CHẶN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2010

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Cho đĩa đơn vị mở $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ký hiệu H^∞ (tương ứng h^∞) là không gian các hàm điều hòa bị chặn được trang bị chuẩn sup:

$$\| f \|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}.$$

Ký hiệu $S(\mathbb{D})$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ $\mathbb{D}$ vào $\mathbb{D}$, Với mỗi $\varphi \in S(\mathbb{D})$ ta thiết lập ánh xạ hợp thành $C_\varphi : H^\infty \to H^\infty$ (hoặc $C_\varphi : h^\infty \to h^\infty$) cho bởi

$$C_\varphi(f) := f \circ \varphi$$

Ta có thể chứng minh C_φ là tuyến tính bị chặn trên H^∞ và h^∞. Trong khuôn khổ luận văn chúng tôi sẽ có các kết quả sau:
1. Điều kiện cần và đủ để C_φ là điểm cô lập trong $C(H^\infty)$.
2. Một sự tương tự về cấu trúc tôpô của $C(h^\infty)$ và $C(H^\infty)$.
Đây là các kết quả được lấy trong bài báo *Composition Operators on the Space of Bounded Harmonic Functions* của Choa, Izuchi và Ohno.
Bố cục luận văn gồm có hai chương:

- Chương 1: Trước hết tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về hàm chỉnh hình, hàm điều hòa, không gian Hardy và tính chất của không gian Hardy trên đĩa đơn vị.
- Chương 2: Tìm điều kiện để C_φ là điểm cô lập trong $C(h^\infty)$.

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TSKH. Nguyễn Quang Diệu ĐHSP Hà Nội, Người Thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ và nghiêm khắc trong khoa học để Tôi hoàn thành bản luận văn. Tôi xin trân trọng cảm ơn toàn thể các thầy cô giáo ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam và các thầy cô giáo trong khoa sau Đại học, ĐHSP Thái Nguyên, Đại Học Thái Nguyên đã tận tình dạy bảo Tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu tại khoa. Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo, gia đình và bạn bè đồng

nghiệp đã giúp đỡ rất nhiều để Tôi hoàn thành bản luận văn này.

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn !

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2010

Học viên

Nguyễn Hùng Cường

Chương 1

Hàm chỉnh hình một biến và không gian Hardy trên đĩa đơn vị

Trong phần này ta giới thiệu các khái niệm và tính chất cơ bản của không gian Hardy H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ trên đĩa đơn vị. Đây là đối tượng chủ yếu để ta nghiên cứu toán tử hợp thành trên không gian này.

1.1 Hàm chỉnh hình

1.1.1 Khái niệm hàm chỉnh hình

Định nghĩa 1.1.1. *Cho hàm số f xác định trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}$. Xét giới hạn*

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z}, \qquad (z, z + \triangle z \in \Omega)$$

Nếu tại điểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z, ký hiệu là $f'(z)$ hay $\frac{df}{dz}(z)$. Như vậy

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z}$$

Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$-khả vi tại z.

Định nghĩa 1.1.2. *Hàm giá trị phức f xác định trong miền $\Omega \subset \mathbb{C}$ gọi là chỉnh hình tại $z_0 \in \Omega$ nếu tồn tại $r > 0$ để f là $\mathbb{C}$- Khả vi tại*

mọi $z \in D(z_0, r) \subset \Omega$.
Nếu f *chỉnh hình tại mọi* $z \in \Omega$ *ta nói* f *chỉnh hình trên* Ω.

Ta có tính chất đơn giản sau:

Tính chất 1.1.1.1. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *là một miền và* $H(\Omega)$ *là tập các hàm chỉnh hình trên* Ω*, Khi đó:*
(i) $H(\Omega)$ *là một không gian véctơ trên* $\mathbb{C}$.
(ii) $H(\Omega)$ *là một vành.*
(iii) Nếu $f \in H(\Omega)$ *và* $f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$ *thì* $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$.
(iv) Nếu $f \in H(\Omega)$ *và* f *chỉ nhận giá trị thực thì* f *là không đổi.*

Định lý 1.1.3. ***(Điều kiện Cauchy- Riemann)***
Để hàm f $\mathbb{C}$*- khả vi tại* $z = x + iy \in \Omega$ *điều kiện cần và đủ là hàm* f $\mathbb{R}^2$*- khả vi tại* z *và điều kiện Cauchy-Riemann được thỏa mãn tại* z.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

Chứng minh. Điều kiện cần:
Giả sử $f\mathbb{C}-$ khả vi tại $z = x + iy \in \Omega$. Khi đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z + \triangle z) - f(z)}{\triangle z}, \qquad \triangle z = \triangle x + i \triangle y.$$

Vì giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách tiến đến 0 của $\triangle z$ nên nếu chọn $\triangle z = \triangle x$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{u(x + \triangle x, y) + iy(x + \triangle x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{u(x + \triangle x, y) - u(x,y)}{\triangle x} + i \lim_{\triangle z \to 0} \frac{v(x + \triangle x, y) - v(x,y)}{\triangle x} \end{aligned}$$

Tức là u và v có đạo hàm riêng theo x tại (x, y) và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \qquad (2)$$

Tương tự bằng cách chọn $\triangle z = i \triangle y$ ta có

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \qquad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta được:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) =& \frac{\partial v}{\partial y}(x,y).\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) =& -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Ta còn phải chứng tỏ $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y). Vì

$$\begin{aligned}\triangle f =& f(z+\triangle z) - f(z)\\ =& f'(z)\triangle z + 0(\triangle z)\end{aligned}$$

Với $0(\triangle z)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $\triangle z$, tức là

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{0(\triangle z)}{\triangle z} = 0$$

Rõ ràng

$$\triangle f = \triangle u + i \triangle v, \quad \triangle z = \triangle x + i \triangle y$$

Theo (2) ta có

$$\triangle u + i \triangle v = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(\triangle x + i \triangle y) + 0(\triangle z) + i0(\triangle z)$$

Từ đó

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x - \frac{\partial v}{\partial x}\triangle y + 0(\triangle z) = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + 0(|\triangle z|)$$

$$\triangle v = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial x}\triangle y + 0(\triangle z) = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y + 0(|\triangle z|)$$

Tức là u và v khả vi tại (x,y).
Điều kiện đủ:
Vì u và v khả vi tại (x,y) nên

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + 0(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2})$$

và

$$\triangle v = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y + 0(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2})$$

Theo điều kiện (1) hai đẳng thức này có thể viết thành

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x} \triangle x - \frac{\partial v}{\partial x} \triangle y + 0(|\triangle z|) \qquad (4)$$

$$\triangle v = \frac{\partial v}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial u}{\partial x} \triangle y + 0(|\triangle z|) \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có

$$\begin{aligned}\frac{\triangle f}{\triangle z} &= \frac{\triangle u}{\triangle z} + i\frac{\triangle v}{\triangle z} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \triangle x - \frac{\partial v}{\partial x} \triangle y + 0(\triangle z)}{\triangle z} + i\frac{\frac{\partial v}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial u}{\partial x} \triangle y + 0(\triangle z)}{\triangle z} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \triangle x + i\frac{\partial u}{\partial x} \triangle y}{\triangle z} + \frac{-\frac{\partial v}{\partial x} \triangle y + i\frac{\partial v}{\partial x} \triangle x}{\triangle z} + \frac{0(\triangle z)}{\triangle z} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{0(\triangle z)}{\triangle z}.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tức là f $\mathbb{C}-$ khả vi tại $z = x + iy$. □

Định lý 1.1.4. *Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ có bán kính hội tụ $R > 0$. Khi đó tổng $f(z)$ của nó chỉnh hình tại mọi z với $|z| < R$ và đạo hàm phức của nó là $\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$.*

Chứng minh. Trước hết chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$ cũng có bán kính hội tụ R.
Thật vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1}$ hội tụ tại $z \neq 0$ nếu và chỉ nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^n$$

hội tụ. Do đó bán kính hội tụ của nó theo công thức Cauchy-Hadamard là

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|nC_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n|} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|}}$$

Lấy z_0 tùy ý, $|z_0| < R$. Đặt

$$\delta(z_0, \triangle z) = \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z} - S(z_0)$$

Trong đó

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n z^{n-1} \qquad , |z| < R.$$

Để chứng minh định lý, ta chỉ cần chứng minh:

$$\lim_{\triangle \to 0} \delta(z_0, \triangle z) = 0$$

Chọn r sao cho $|z_0| < r < R$. xét $\triangle z$ đủ bé sao cho

$$|z_0| + |\triangle z| < r.$$

dễ thấy

$$\delta(z_0, \triangle z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(z_0, \triangle z)$$

với

$$\begin{aligned}\delta_n(z_0, \triangle z) =& \frac{C_n(z_0 + \triangle z)^n - C_n z_0^n}{\triangle z} - nC_n z_0^{n-1} \\ =& C_n \left[(z_0 + \triangle z)^{n-1} + (z_n + \triangle z)^{n-2} z_0 + ... + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1}\right]\end{aligned}$$

Ta có

$$|\delta_n(z_0, \triangle z)| \leq 2n |C_n| r^{n-1}$$

Với $\epsilon > 0$ tùy ý, vì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n |C_n| r^{n-1}$ hội tụ nên tồn tại $N = N(\epsilon)$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n |C_n| r^{n-1} < \frac{\epsilon}{2}$$

vì

$$\lim_{\triangle z \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n(z_0, \triangle z) = 0$$

Nên với $\triangle z$ đủ nhỏ ta có

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1}\delta_n(z_0,\triangle z)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Từ đó $\triangle z$ đủ bé ta có

$$|\delta(z_0,\triangle z)| \leq \left|\sum_{n=0}^{N-1}\delta_n(z_0,\triangle z)\right| + \sum_{n=N}^{\infty}|\delta(z_0,\triangle z)| < \epsilon.$$

□

1.1.2 Công thức tích phân Cauchy.

Định lý 1.1.5. *Giả sử f là một hàm chỉnh hình trên miền Ω và $z_0 \in \Omega$. Khi đó mọi chu tuyến $\gamma \subset \Omega_\gamma \subset \Omega$ ta có công thức tích phân Cauchy.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}d\eta. \qquad (1)$$

Nếu f liên tục trên $\overline{\Omega}$ và $\partial\Omega$ là một chu tuyến, thì với mọi $z \in \Omega$ ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta. \qquad (2)$$

Chứng minh. Giả sử γ là một chu tuyến tùy ý vây quanh z_0 sao cho $\Omega_\gamma \subset \Omega$. Chọn $\rho > 0$ đủ bé để hình tròn $D(z_0,\rho) \subset \Omega_\gamma$. Ký hiệu C_ρ là biên của $D(z_0,\rho)$ và đặt

$$\Omega_{\gamma,\rho} = \Omega_\gamma \setminus D(z_0,\rho)$$

$\Omega_{\gamma,\rho}$ là miền 2 - liên, nên ta có:

$$\int_{\gamma\cup C_\rho^-}\frac{f(\eta)}{\eta - z_0}d\eta = 0$$

Từ đó có đẳng thức:

$$\int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}d\eta = \int_{C_\rho}\frac{f(\eta)}{\eta - z_0}d\eta \qquad (3)$$