ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THỦY

VỀ QUY TẮC FERMAT TRONG BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỪ TOÁN SƠ CẤP ĐẾN TOÁN CAO CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THỦY

VỀ QUY TẮC FERMAT TRONG BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỪ TOÁN SƠ CẤP ĐẾN TOÁN CAO CẤP

Chuyên ngành: **Phương pháp Toán sơ cấp**
Mã số: **60 46 01 13**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: **GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU**

Thái Nguyên - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan: Bản luận văn tốt nghiệp này là công trình nghiên cứu của cá nhân tôi, được thực hiện trên cơ sở nghiên cứu lý thuyết, nghiên cứu khảo sát và phân tích từ thực tiễn dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu.

Tôi xin cam đoan rằng số liệu và kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và chưa được sử dụng để bảo vệ một học vị nào, phần tài liệu tham khảo được xếp đúng thứ tự và đủ các thông tin theo đúng yêu cầu.

Thái Nguyên, ngày 24 tháng 03 năm 2015

Tác giả

Phạm Thị Thủy

Mục lục

Danh sách ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều
$f'(x), f''(x)$	Đạo hàm (bậc 1 và bậc 2) của hàm số *f(x)*
$\lim_{n \to a} f(x)$	Giới hạn của hàm số *f(x)* khi *x* dần tới *a*
[a,b]	Đoạn thẳng nối hai điểm a và b
$\langle .,. \rangle$	Tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$
∇f	Gradient của hàm f
$\nabla^2 f$	Ma trận Hessian
∂f	Dưới vi phân của hàm f
$N_C(x)$	nón pháp tuyến ngoài của *C* tại *x*

Lời nói đầu.

Trong việc ứng dụng toán học vào các bài toán thực tiễn, các bài toán cực trị là một trong những dạng toán gần với những ứng dụng thực tế nhất. Những yêu cầu về đường đi ngắn nhất, đường đi nhanh nhất, góc nhìn lớn nhất, tổng thời gian chờ đợi ít nhất, tổng chi phí ít nhất, tổng lợi nhuận cao nhất, diện tích lớn nhất … là những yêu cầu rất tự nhiên xuất phát từ những bài toán của sản xuất, đời sống và khoa học. Chính vì thế những bài toán cực trị cần có một chỗ đứng xứng đáng trong chương trình toán ở phổ thông. Các phương pháp giải bài toán cực trị cũng cần phải được trình bày một cách bài bản. Trên phương diện phương pháp, có hai cách tiếp cận chính cho lời giải của các bài toán cực trị, đó là phương pháp sử dụng bất đẳng thức và phương pháp hàm số. Với phương pháp bất đẳng thức, sơ đồ cơ bản là: Để chứng minh M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên miền C, ta sẽ chứng minh

i) $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc C

ii) Tồn tại x_0 thuộc C sao cho $f(x_0) = M$.

Phương pháp hàm số sẽ khảo sát hàm $f(x)$ trên C và dựa vào các định lý của giải tích để tìm ra điểm cực trị và giá trị M. Fermat – một luật sư, nhà toán học người Pháp đã sử dụng công cụ đạo hàm để giải bài toán cực trị bằng cách đưa bài toán cực trị từ cách giải đánh giá bằng bất đẳng thức cần nhiều tư duy, mẹo mực về cách giải tự nhiên tìm điểm nghi vấn chỉ nhờ giải các phương trình (đối với hàm số một biến) và hệ phương trình (đối với hàm số nhiều biến).

Quy tắc Fermat là một công cụ mạnh, cho phép bài toán cực trị có được lời giải tự nhiên

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu quy tắc Fermat trong từng bước phát triển của nó từ sơ cấp lên cao cấp, nhằm nâng cao kiến thức và khả năng trong giảng dạy và nghiên cứu về toán tối ưu, có được cái nhìn tổng thể từ toán cao cấp vào toán sơ cấp.

Nội dung luận văn được viết trong 3 chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.

Một số kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, hàm khả vi, điểm dừng…

Chương 2. Quy tắc Fermat.

Quy tắc Fermat và các ví dụ ứng dụng trong các trường hợp hàm số một biến, khả vi, không có ràng buộc, phát triển đến hàm một biến khả vi, có điều kiện ràng buộc, nâng cao lên hàm nhiều biến, khả vi, không ràng buộc, tổng quát nhất là bài toán hàm nhiều biến, không khả vi và có ràng buộc. Sau mỗi bước phát triển ta đều có thể quay trở về bài toán sơ cấp trước đó bằng cách bổ sung thêm giả thiết. Từ đó thấy được các bước phát triển của quy tắc Fermat, đồng thời cũng cho thấy cái nhìn của Toán cao cấp vào toán sơ cấp.

Chương 3. Ứng dụng quy tắc Fermat vào giải các bài toán phổ thông.

Ứng dụng quy tắc Fermat vào giải các bài toán phổ thông, từ những bài toán đơn giản đến những bài toán nâng cao, từ cách giải áp dụng trực tiếp quy tắc đến việc sử dụng toán cao cấp định hướng cho cách giải trong chương trình phổ thông.

Do thời gian và kiến thức có hạn nên chắc chắn luận văn này còn nhiều thiếu sót, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp thu và hoàn thiện luận văn hơn nữa.

Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TSKH Lê Dũng Mưu, Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã tận tình chỉ bảo, giúp đỡ tác giả trong quá trình làm luận văn.

Bên cạnh đó, tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn đến ban giám hiệu trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, Khoa Toán Tin, trung tâm học liệu đã tạo điều kiện giúp tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 24 tháng 03 năm 2015

Học viên

Phạm Thị Thủy

Chương 1.

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này chủ yếu nhắc lại một số khái niệm cơ bản về hàm lồi, tập lồi, các khái niệm cực tiểu cực đại, bài toán tối ưu, khái niệm đạo hàm, đạo hàm cấp hai. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [3], [4], [5].

1.1. Tập lồi

Định nghĩa 1.1.

Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu *C* chứa mọi đoạn thẳng đi qua 2 điểm bất kỳ của nó. Tức *C* là lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Ta nói *x* là *tổ hợp lồi* của các điểm (véc-tơ) $x^1, x^2, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j, \lambda_j > 0 \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

Một điểm $x \in C$ được gọi là *điểm cực biên* của *C* nếu *x* không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt bất kì nào của *C*, tức không tồn tại $y, z \in C, y \neq z$ sao cho $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ với $0 < \lambda < 1$.

Ví dụ 1.1.

Trong $\mathbb{R}^1$ các khoảng

$$(a,b) = \{\lambda a + (1-\lambda) b \mid \lambda \in (0,1)\},$$