ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THU THẢO

K-METRIC VI PHÂN KOBAYASHI-VENTURINI VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

PHẠM THU THẢO

K-METRIC VI PHÂN KOBAYASHI-VENTURINI VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Lý thuyết không gian phức hyperbolic gắn liền với giả khoảng cách Kobayashi được S.Kobayashi xây dựng đầu tiên vào cuối những năm 60 và là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Trong nhiều năm gần đây lý thuyết này đã phát triển mạnh và thu được nhiều kết quả đặc sắc với các công trình của S.Kobayashi, H.Royden, J.Noguchi, ... Năm 1996, S.Venturini [8] đã đưa ra ý tưởng về việc xây dựng một giả metric vi phân mới trên không gian các phân thớ véc tơ $J(X)$ của các đường cong chỉnh hình trên một không gian phức X. Dựa vào đó ông đã chỉ ra một dạng biểu diễn tích phân của giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X. Tuy nhiên dạng biểu diễn này không trùng với dạng biểu diễn gốc của Royden trong trường hợp đa tạp phức. Năm 1999, Đỗ Đức Thái và Phạm Việt Đức [7] đã đề xuất một cải tiến cách xây dựng của S.Kobayashi trên các không gian phức trùng với dạng biểu diễn ban đầu của Royden. Hơn nữa, năm 2007, A. Khalfallah [3] đã chứng minh được một đặc trưng vi phân cho tính hyperbolic của không gian phức thông qua metric vi phân Kobayashi-Venturini, đồng thời chỉ ra được tính hyperbolic tương đương với tính chất Landau của một không gian phức tùy ý.

Mục đích của đề tài này là trình bày về metric vi phân Kobayashi-Venturini cùng một số ứng dụng của nó trong việc biểu diễn tích phân của giả khoảng cách Kobayashi đồng thời chứng minh một số đặc trưng cho tính hyperbolic của các không gian phức.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 2 chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương I trình bày một số kiến thức cơ bản để thuận tiện cho việc trình bày chương sau, cụ thể là: Giả khoảng cách Kobayashi, không gian phức hyperbolic, metric vi phân Royden-Kobayashi F_M trên đa tạp phức, bất đẳng thức Holder đối với giả khoảng cách Kobayashi.

Chương II là nội dung chính của luận văn: Trong chương này chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất của metric vi phân Kobayashi-Venturini. Tiếp theo là hai ứng dụng của metric vi phân này trong việc biểu diễn tích phân của giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức tùy ý và một số tiêu chuẩn cho tính hyperbolic của không gian phức.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới dự hướng dẫn của PGS. TS. Phạm Việt Đức. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn của mình, PGS. TS. Phạm Việt Đức, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, bộ phận quản lý Sau đại học - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán k20, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Do thời gian ngắn và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2014

Tác giả

Phạm Thu Thảo

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Giả khoảng cách Kobayashi

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $Hol(\Delta, X)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ $\Delta = z \in \mathbb{C}; |z| < 1$ vào X, được trang bị tô pô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của Δ và dãy các ánh xạ $f_1, f_2, ..., f_k$ trong $Hol(\Delta, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i, \quad \forall i = 1, ..., k.$$

Tập hợp $\alpha = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Ta định nghĩa

$$d_X(x, y) = \inf_{\alpha}\{\sum_{i=1}^{k} \rho_\Delta(0, a_i), \alpha \in \Omega_{x,y}\},$$

trong đó $\Omega_{x,y}$ là tập hợp các dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X và ρ_Δ là khoảng cách Bezgman-Poincare trên đĩa đơn vị Δ.

Khi đó $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là một giả khoảng cách trên X và gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X.

Tổng $\sum_{i=1}^{k} \rho_\Delta(0, a_i)$ được gọi là tổng Kobayashi của dây chuyền chỉnh hình α. Nếu X không liên thông ta định nghĩa $d_X(x, y) = \infty$ với x, y thuộc các thành phần liên thông khác nhau.

1.1.2 Định lý

Nếu $f : X \to Y$ là các ánh xạ chỉnh hình giữa hai không gian phức thì f làm giảm khoảng cách đối với giả khoảng cách Kobayashi, nghĩa là

$$d_X(x, y) \geq d_Y(f(x), f(y)), \forall x, y \in X.$$

Hơn nữa, d_X là giả khoảng cách lớn nhất trên X thỏa mãn mỗi ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \to X$ là giảm khoảng cách.

Chứng minh.

Tính giảm khoảng cách của giả khoảng cách Kobayashi là hiển nhiên, vì nếu α là dây chuyền chỉnh hình nối hai điểm x và y trong X thì $f \circ \alpha$ cũng là dây chuyền chỉnh hình nối $f(x), f(y)$ trong Y.

Bây giờ ta chứng minh tính lớn nhất của giả khoảng cách Kobayashi. Lấy hai điểm x, y tùy ý trong X. Gọi

$$\alpha = \{f_i \in Hol(\Delta, X), a_i \in \Delta, i = 1, ..., k\}$$

là dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X. Giả sử d' là giả khoảng cách trên X có tính chất giảm khoảng cách qua các ánh xạ chỉnh hình từ Δ tới X. Ta chứng minh $d_X \geq d'$.

Gọi $p_i \in X, i = 0, ..., k$ là các điểm thỏa mãn $f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i$.

Khi đó ta có

$$d'(x, y) \leq \sum_{i=1}^{k} d'(p_{i-1}, p_i) = \sum_{i=1}^{k} d'(f_i(0), f_i(a_i)) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_\Delta(0, a_i).$$

Theo định nghĩa giả khoảng cách Kobayashi ta có

$$d'(x, y) \leq d_X(x, y).$$

Vậy định lý được chứng minh.

1.1.3 Ví dụ

a) $d_\Delta = \rho_\Delta$ với Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$.
b) $d_{\mathbb{C}^m} = 0$.

1.1.4 Định lý

Đối với bất kỳ các không gian phức X, Y ta có

$$d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) = max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\},$$

với $x, x' \in X$ và $y, y' \in Y$.

1.1.5 Định lý

Giả sử X là không gian phức. Khi đó giả khoảng cách Kobayashi $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

1.2 Không gian phức hyperbolic

1.2.1 Định nghĩa

Không gian phức X được gọi là không gian hyperbolic (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X, tức là

$$d_X(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q \quad \forall p, q \in X.$$

1.2.2 Một số tính chất của không gian phức hyperbolic

i) *Giả sử X, Y là các không gian phức, thì $X \times Y$ là không gian hyperbolic nếu và chỉ nếu cả X và Y đều là không gian hyperbolic.*

ii) *Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Nếu Y là hyperbolic thì X cũng là hyperbolic. Hay nói cách khác, không gian con của một không gian hyperbolic là hyperbolic.*

iii) +) Đĩa Δ_r và đa đĩa Δ_r^m là hyperbolic.

+) Mọi miền bị chặn trong $\mathbb{C}^m$ là hyperbolic.

+) $\mathbb{C}^m$ không là hyperbolic, vì $d_{\mathbb{C}^m} = 0$.

1.2.3 Định lý (Barth)

Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì d_X sinh ra tô pô tự nhiên của X.

1.2.4 Bổ đề Eastwood

Giả sử $\pi : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic và với mỗi điểm $y \in Y$ có lân cận U của y sao cho $\pi^{-1}(U)$ là hyperbolic.

Khi đó X là hyperbolic.

1.2.5 Mệnh đề

Giả sử X là không gian phức và $\pi : X' \to X$ là ánh xạ phủ chỉnh hình của X. Khi đó

i) Nếu $p, q \in X$ và $p', q' \in X'$ với $\pi(p') = p$ và $\pi(q') = q$, thì

$$d_X(p,q) = \inf_{q'}\{d_{X'}(p',q')\},$$

trong đó infimum được lấy với mọi $q' \in X'$ thỏa mãn $\pi(q') = q$;

ii) X' là hyperbolic khi và chỉ khi X là hyperbolic.

1.3 Metric vi phân Royden - Kobayashi trên đa tạp phức

1.3.1 Định nghĩa

Cho M là một đa tạp phức m chiều và TM là phân thớ tiếp xúc của M. Một ánh xạ $F : TM \to \mathbb{R}^+$ được gọi là metric vi phân trên M nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$i)$ $F(0_x) = 0$, trong đó 0_x là véc tơ không của T_xM;

$ii)$ Với mọi $\xi_x \in T_xM$ và $a \in \mathbb{C}$ thì $F(a\xi_x) = |a|\, F(\xi_x)$.

Hơn nữa, nếu F liên tục và $F(\xi_x) \neq 0, \forall \xi_x \in T_xM$ thì F được gọi là metric Finsler trên TM.

Xét ánh xạ $F_M : TM \to \mathbb{R}$ được xác định như sau: với bất kì $\xi_x \in T_xM$, đặt

$$F_M(\xi_x) = inf\{\frac{1}{r}; \exists f \in Hol(\Delta_r, M); f(0) = x, f_*(\frac{\partial}{\partial_z}|_0) = \xi_x\}.$$

Khi đó ta có: Ánh xạ $F_M : TM \to \mathbb{R}^+$ xác định như trên là một metric vi phân.

1.3.2 Định nghĩa

Metric vi phân F_M được gọi là metric vi phân Royden-Kobayashi trên đa tạp phức M.

1.3.3 Các tính chất của F_M

1.3.3.1 Định lý

Cho M, N là hai đa tạp phức và $f : M \to N$ là một ánh xạ chỉnh hình. Khi đó ta có $f^*F_N \leq F_M$, tức là với mọi $\xi_x \in T_xM$

$$F_N(f_*(\xi_x)) \leq F_M(\xi_x).$$

Đặc biệt, nếu f là song chỉnh hình thì $f^*F_N = F_M$.

1.3.3.2 Mệnh đề

Cho M_1, M_2 là các đa tạp phức. Khi đó với bất kì $\xi_x + \eta_y \in T_xM_1 + T_yM_2$ ta có