ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THÙY LINH

MỘT SỐ DẠNG TOÁN ĐẠI SỐ NÂNG CAO

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THÙY LINH

MỘT SỐ DẠNG TOÁN ĐẠI SỐ NÂNG CAO

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN, NĂM 2015

Lời cảm ơn

Trước hết em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới người thầy đáng kính TS. Nguyễn Văn Ngọc, thầy đã không ngại khó khăn tận tình hướng dẫn, giúp đỡ em trong suốt quá trình xây dựng đề cương, làm và hoàn thiện luận văn.

Em xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất đến các thầy cô giáo, Ban lãnh đạo trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên những người đã tạo điều kiện về mọi mặt để em được tham gia học tập và hoàn thành khóa học. Đồng thời em cũng gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, các bạn học viên lớp K7Q những người luôn lắng nghe, đóng góp ý kiến, giúp đỡ, động viên em trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã cố gắng rất nhiều, nhưng do năng lực của bản thân còn nhiều hạn chế nên chắc chắn luận văn không tránh khỏi nhiều thiếu sót, em rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Em xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, ngày............tháng.........năm 2015

Học viên

Phạm Thùy Linh

Mục lục

Mở đầu

Đẳng thức, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình v.v..là những chuyên mục đại số quan trọng được dạy ở bậc phổ thông. Các bài toán của các chuyên mục này (và của hầu hết các chuyên mục khác) có thể được phân thành các loại như: cơ bản, nâng cao và khó.

Các bài toán nâng cao và khó thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp hoặc thi vào trường chuyên. Các bài toán loại này thu hút được nhiều người dạy và học, kích thích sự tò mò, đam mê, góp phần nâng cao chất lượng học tập. Do đó, việc tìm hiểu, thu thập, sáng tác và biên tập các bài toán nâng cao và khó là cần thiết cho công việc giảng dạy và học tập toán học ở bậc phổ thông.

Mục đích của luận văn này là giới thiệu các bài toán nâng cao và khó (gọi chung là nâng cao) của một số chuyên mục trong đại số như: đồng nhất thức, bất đẳng thức và phương trình đại số. Đó là những chuyên mục của cơ bản của đại số ở bậc phổ thông, nhất là trung học cơ sở.

Luận văn có cấu trúc: Mở đầu, ba chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Đồng nhất thức.

Chương này trình bày một số dạng toán nâng cao về đa thức và phân thức, đặc biệt khai thác một số hằng đẳng thức áp dụng tính giá trị của các biểu thức khá phức tạp, chứng minh đẳng thức, phân tích thành nhân tử, v.v.. Trình bày một số tính chất của phân thức hữu tỷ và áp dụng tính giá trị của các biểu thức phân thức hữu tỷ v.v..

Chương 2: Đa thức đối xứng và một số ứng dụng.

Các bài toán có tính đối xứng, nhất là các bài toán vê bất đẳng thức, thường khá đẹp về hình thức và độc đáo về cách giải nên rất hấp dẫn người dạy và học toán sơ cấp ở bậc phổ thông. Một trong những công cụ hiệu quả giải các bài toán có tính đối xứng là vận dụng lý thuyết đa thức đối xứng mà cụ thể là công thức Waring về biểu diễn các tổng lũy thừa theo các đa thức đối xứng cơ sở. Lý thuyết đa thức đối xứng và áp dụng bằng tiếng Việt có thể tìm thấy trong tài liệu [2].

Chương này được hình thành trên cơ sở tài liệu [2], tuy nhiên các bài toán trình bày trong chương này hoàn toàn chưa được giới thiệu trong tài liệu nói trên, trong số đó có nhiều bài do tác giả sáng tác. Các bài toán về bất đẳng thức chiếm một vị trí đáng kể trong số các bài toán được giới thiệu trong chương này.

Chương 3: Phương trình bậc ba và phương trình bậc bốn.

Phương trình và hệ phương trình đại số là chuyên mục trung tâm của đại số và đã được dạy từ bậc trung học cơ sở. Hiện nay đã có một số lượng lớn các tài liệu giới thiệu về phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai.

So với các phương trình cấp thấp, các phương trình bậc cao hơn, như bậc ba và bậc bốn không được giới thiệu tổng quát ở bậc phổ thông, mặc dù đã có những phương trình cụ thể có thể dễ dàng đưa về phương trình bậc thấp hơn. Ngoài ra, số lượng cũng như mức độ khó của các phương trình bậc cao cũng còn hạn chế, do đó, chương này của luận văn dành cho việc trình bày cách giải các phương trình bậc ba, bậc bốn và nghiên cứu các bài toán khác nhau liên quan đến hai lớp phương trình này. Các bài toán được giới thiệu ở đây đa phần là các bài toán khó được lấy từ các đề thi vào đại học hay thi học sinh giỏi các cấp của các nước. Nội dung của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1] và [4].

Chương 1

Đồng nhất thức

Chương này trình bày một số dạng toán nâng cao về đa thức và phân thức, đặc biệt khai thác một số hằng đẳng thức áp dụng tính giá trị của các biểu thức khá phức tạp, chứng minh đẳng thức, phân tích thành nhân tử, v.v.. Trình bày một số phương pháp tính giá trị của các biểu thức phân thức hữu tỷ. Nội dung của chương này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [5-8], [9] và [**??**].

1.1 Hằng đẳng thức và căn thức

1.1.1 Các hằng đẳng thức

1. Bình phương của một tổng, hiệu

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \mp b)^2 \pm 4ab.$$

2. Hiệu hai lũy thừa cùng bậc

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

3. Tích hai tổng của hai bình phương

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

4. Tổng của hai lũy thừa cùng bậc lẻ

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

5. Lũy thừa của tổng hai số (Nhị thức Newton)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ n! = 1.2\ldots n,\ 0! = 1.$$

1.1.2 Căn thức

Căn bậc $n(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ của một số thực a là số thực b (nếu có) sao cho $b^n = a$.

1. Căn bậc lẻ $(n = 2k+1)$: Mọi số thực đều có căn bậc lẻ và chỉ có một căn bậc lẻ được ký hiệu là $\sqrt[2k+1]{a}$.
2. Căn bậc chẵn $(n = 2k)$: Số thực âm không có căn bậc chẵn. Số 0 có căn bậc chẵn là 0. Số dương có hai căn bậc chẵn là hai số đối nhau là $\sqrt[2k]{a}$ và $-\sqrt[2k]{a}$ (trong đó $\sqrt[2k]{a} \geq 0$).

Một số phép biến đổi căn thức cơ bản

a. Biến đổi căn bậc lẻ

$$\sqrt[2k+1]{A^{2k+1}} = A; \qquad \sqrt[2k+1]{A^{2k+1}B} = A.\sqrt[2k+1]{B}$$

$$\sqrt[2k+1]{A.B} = \sqrt[2k+1]{A}.\sqrt[2k+1]{B}; \qquad \sqrt[2k+1]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[2k+1]{A}}{\sqrt[2k+1]{B}},\ B \neq 0.$$

b. Biến đổi căn bậc chẵn

$$\sqrt[2k]{A^{2k}} = |A|; \qquad \sqrt[2k]{AB} = \sqrt[2k]{|A|}.\sqrt[2k]{|B|} \quad AB \geq 0$$

$$\sqrt[2k]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[2k]{|A|}}{\sqrt[2k]{|B|}}\ AB \geq 0,\ B \neq 0; \qquad \sqrt[2k]{A^{2k}.B} = |A|.\sqrt[2k]{B},\ B \geq 0.$$

1.1.3 Một số bài toán

Bài toán 1.1. Phân tích thành nhân tử

a. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1.$

b. $6x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 15x^3 + 6x - 1.$

Lời giải.

a. Ta có

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 &= (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (2x^2 - 6x) + 1 \\ &= (x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 3x) + 1 \\ &= (x^2 - 3x + 1)^2. \end{aligned}$$

b. Khai triển nhị thức Newton

$$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^3 - 6x + 1.$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
&6x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 15x^3 + 6x - 1 = x^6 - (x-1)^6\\
&= [x^3 - (x-1)^3][x^3 + (x-1)^3]\\
&= [x^2 + x(x-1) + (x-1)^2][(2x-1)(x^2 - x(x-1) + (x-1)^2]\\
&= (3x^2 - 3x + 1)(2x-1)(x^2 - x + 1).
\end{aligned}
$$

Bài toán 1.2. Phân tích thành nhân tử các biểu thức

a. $x^8 + x^4 + 1.$

b. $x^{10} + x^5 + 1.$

Lời giải.

a. Ta có

$$
\begin{aligned}
x^8 + x^4 + 1 &= (x^8 + 2x^4 + 1) - x^4\\
&= (x^4+1)^2 - x^4 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)\\
&= (x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)\\
&= [(x^2+1)^2 - x^2][(x^2+1)^2 - (\sqrt{3}x)^2]\\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).
\end{aligned}
$$

b. Ta có

$$
\begin{aligned}
x^{10} + x^5 + 1 &= (x^{10} + x^9 + x^8) - (x^9 + x^8 + x^7)\\
&+ (x^7 + x^6 + x^5) - (x^6 + x^5 + x^4)\\
&+ (x^5 + x^4 + x^3) - (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1)\\
&= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).
\end{aligned}
$$

Bài toán 1.3. Phân tích thành nhân tử

a. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

b. $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$

Lời giải.

a. Ta có

$$
\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz\\
&= [(x+y)^3 + z^3] - 3xy(x+y+z)\\
&= (x+y+z)[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2]\\
&- 3xy(x+y+z)\\
&= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).
\end{aligned}
$$