ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG

QUAN HỆ SỐ KHUYẾT CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH KẾT HỢP VỚI CÁC SIÊU MẶT

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

MỤC LỤC

Mục lục 1

Mở đầu 2

Chương 1 Một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình 5

1.1 Công thức Poisson - Jensen 5

1.2 Các hàm Nevanlinna 6

1.3 Định lý cơ bản thứ nhất 9

1.4 Định lý cơ bản thứ hai 10

1.5 Quan hệ số khuyết 10

Chương 2 Quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình kết hợp với các siêu mặt 15

2.1 Một số kiến thức cơ bản 15

2.2 Quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 18

2.3 Quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình vào đa tạp tuyến tính 34

Kết luận 40

Tài liệu tham khảo 41

MỞ ĐẦU

Bài toán nghiên cứu quan hệ số khuyết cho các hàm và ánh xạ chỉnh hình là một bài toán quan trọng, có một lịch sử lâu dài và thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình, ta đã biết một kết quả nổi tiếng: *Tổng số khuyết của một hàm phân hình phức tại tất cả các điểm luôn nhỏ hơn hoặc bằng* 2. Năm 1933, H. Cartan ([3]) mở rộng kết quả trên cho ánh xạ chỉnh hình phức, Ông đã chứng minh:

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(H_j) \leqslant n+1,$$

trong đó $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính và* $H_1, \ldots, H_q$ *là các siêu phẳng trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *ở vị trí tổng quát.* Về sau, rất nhiều nhà toán học đã xem xét vấn đề tương tự cho trường hợp các siêu mặt không tuyến tính: Eremenko và Sodin ([7]), Y.- T. Siu ([14]), A. Biancofiore ([2]), Ru ([10],[11]) và nhiều nhà toán học khác.

Các kết quả nghiên cứu về số khuyết của ánh xạ chỉnh hình gắn liền với hai giả thuyết quan trọng của P. Griffiths (xem [4], [10]) đặt ra vào năm 1972 và B. Shiffman (xem [13], [10]) vào năm 1979. Với một ánh xạ chỉnh hình không suy biến đại số $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một họ $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ các siêu mặt bậc d, ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, P. Griffiths đặt ra

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(D_j) \leqslant \frac{n+1}{d}.$$

Trong ([13]), B. Shiffman cho rằng đó là giả thuyết khó, ông cho rằng

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_f(D_j) \leqslant n+1.$$

Giả thuyết của B. Shiffman được M. Ru giải quyết năm 2004, giả thuyết của P. Griffiths đến nay vẫn là một vấn đề mở.

Mục tiêu của luận văn là giới thiệu công trình của M. Ru về quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và của H. T. Phuong cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$, trong đó X là một đa tạp tuyến tính trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Bố cục luận văn gồm phần mở đầu, hai chương nội dung, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1, luận văn trình bày một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình: Công thức Poisson-Jensen, các hàm Nevanlinna, hai định lý cơ bản của Nevanlinna và bổ đề về quan hệ số khuyết trong trường hợp hàm phân hình.

Trong Chương 2, luận văn trình bày một số kết quả về quan hệ số khuyết cho đường cong chỉnh hình trong các trường hợp $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$, trong đó X là một đa tạp tuyến tính k chiều ($k \leq n$), kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm của TS. Hà Trần Phương. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với Thầy về những giúp đỡ cùng những điều kiện thuận lợi nhất mà Thầy dành cho tác giả trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Khoa Sau đại học, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo khoa Toán - ĐHSP Thái Nguyên, Viện Toán học đã tận tình giảng dạy, truyền thụ kiến thức và giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên, các đồng nghiệp cùng bộ môn Toán, các cán bộ giảng viên khoa

Khoa học cơ bản đã quan tâm, tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả thực hiện kế hoạch học tập của mình.

Xin cảm ơn người thân, bạn bè đã cổ vũ động viên tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Chương 1

Một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình và một số kiến thức chuẩn bị cho chương 2.

1.1 Công thức Poisson-Jensen

Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình xác định trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Điểm $z_0 \in D$ được gọi là không điểm bội k của f nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận nào đó của z_0 và trong lân cận đó hàm f biểu diễn được dưới dạng

$$f(z) = (z - z_0)^k.h(z),$$

nghĩa là $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ và $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Hàm $f(z)$ được gọi là hàm phân hình trong D nếu $f(z)$ chỉnh hình trên D trừ ra một số các điểm bất thường là cực điểm. Giả sử f là một hàm phân hình, khi đó $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ trong đó f_1, f_2 là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung. Số phức z_0 được gọi là không điểm bội k của hàm $f(z)$ nếu z_0 là không điểm bội k của $f_1(z)$, z_0 được gọi là cực điểm bội k

của $f(z)$ nếu z_0 là không điểm bội k của $f_2(z)$.

Cấp của hàm phân hình f tại điểm z_0, ký hiệu là $\mathrm{ord}_{z_0} f$, là số nguyên k nhỏ nhất sao cho $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^k}$ là hàm chỉnh hình, khác 0 tại z_0.

Định lý 1.1 (Công thức Poisson - Jensen, [12]). *Giả sử $f(z) \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong hình tròn $\{|z| \leq R\}$, $0 < R < +\infty$. Giả sử a_μ, $\mu = 1, ..., M$ là các không điểm của f, kể cả bội, b_ν, $\nu = 1, ..., N$ là các cực điểm của f, cũng kể cả bội, trong hình tròn đó. Khi đó, với $z = re^{i\theta}(0 \leq r < R), f(z) \neq 0, +\infty$ ta có*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \bar{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \bar{b}_\nu z}\right|. \qquad (1.1)$$

1.2 Các hàm Nevanlinna

Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong đĩa $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, trong đó $0 < R \leq \infty$ và $r < R$. Với mỗi số thực dương x, ký hiệu $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.

Định nghĩa 1.2 ([12]). Hàm

$$m_f(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của f.

Ký hiệu

$$m_f(r, a) = m_{\frac{1}{f-a}}(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - a}\right| d\varphi,$$

hàm $m_f(r,a)$ được gọi là *hàm xấp xỉ* của f tại giá trị $a \in \mathbb{C}$.

Đặt $n_f(r,\infty)$ (tương ứng $\overline{n}_f(r,\infty)$) là số các cực điểm tính cả bội (tương ứng, không tính bội) của hàm f trong đĩa $\overline{D}_r = \{|z| \le r\}$. Ký hiệu

$$n_f(r,a) = n_{\frac{1}{f-a}}(r,\infty),$$

$$\overline{n}_f(r,a) = \overline{n}_{\frac{1}{f-a}}(r,\infty).$$

Định nghĩa 1.3 ([12]). Hàm

$$N_f(r,\infty) = n_f(0,\infty)\log r + \int\limits_0^r \Big(n_f(t,\infty) - n_f(0,\infty)\Big)\frac{dt}{t}$$

được gọi là *hàm đếm tính cả bội* của f, hàm

$$\overline{N}_f(r,\infty) = \overline{n}_f(0,\infty)\log r + \int\limits_0^r \Big(\overline{n}_f(t,\infty) - \overline{n}_f(0,\infty)\Big)\frac{dt}{t}$$

được gọi là *hàm đếm không tính bội* của f.

Ký hiệu

$$N_f(r,a) = N_{\frac{1}{f-a}}(r,\infty),$$

$$\overline{N}_f(r,a) = \overline{N}_{\frac{1}{f-a}}(r,\infty).$$

Khi đó

$$N_f(r,0) = (\mathrm{ord}_0^+ f)\log r + \sum_{z\in D_r, z\neq 0} (\mathrm{ord}_z^+ f)\log\left|\frac{r}{z}\right|.$$

Định nghĩa 1.4 ([12]). Hàm

$$T_f(r) = m_f(r,\infty) + N_f(r,\infty)$$

được gọi là *hàm đặc trưng* của f.

Ký hiệu

$$T_f(r,a) = T_{\frac{1}{f-a}}(r,\infty)$$

hàm $T_f(r,a)$ được gọi là *hàm đặc trưng* của f tại $a \in \mathbb{C}$.

Nhận xét 1.5. Khi $f \sim a$ thì $m_f(r, a)$ nhận giá trị càng lớn, do đó có thể coi $m_f(r, a)$ là hàm đo tập hợp f nhận giá trị gần a. Hàm $N_f(r, a)$ đo tập hợp f nhận giá trị a. Xét về mặt nào đó, hàm $T_f(r)$ đối với lý thuyết hàm phân hình có vai trò như bậc của đa thức trong lý thuyết đa thức. Từ định nghĩa hàm đặc trưng ta có

$$T_f(r, a) \geq N_f(r, a) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng bị chặn khi $r \longrightarrow \infty$. Khi đó công thức Poisson - Jensen (1.1) được viết lại như sau

$$T_f(r) = T_f(r, a) + \log |f(0)|.$$

Tiếp theo, ta nghiên cứu một số tính chất đơn giản của các hàm Nevanlinna. Dễ thấy, nếu $a_1, ..., a_p$ là các số phức thì

$$\log^+ \Big| \prod_{\mu=1}^{p} a_\mu \Big| \leq \sum_{\mu=1}^{p} \log^+ |a_\mu|$$

và

$$\log^+ \Big| \sum_{\mu=1}^{p} a_\mu \Big| \leq \sum_{\mu=1}^{p} \log^+ |a_\mu| + \log p.$$

Giả sử $f_1(z), ..., f_p(z)$ là các hàm phân hình. Đặt

$$f(z) = \sum_{\mu=1}^{p} f_\mu(z),$$

$$g(z) = \prod_{\mu=1}^{p} f_\mu(z).$$

Áp dụng hai bất đẳng thức trên cho p hàm phân hình, ta thu được một số tính chất sau đây của các hàm Nevanlinna:

$$m_f(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} m_{f_\mu}(r,\infty) + \log p.$$

$$m_g(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} m_{f_\mu}(r,\infty).$$

$$N_f(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} N_{f_\mu}(r,\infty).$$

$$N_g(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} N_{f_\mu}(r,\infty).$$

$$T_f(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} T_{f_\mu}(r,\infty) + \log p.$$

$$T_g(r,\infty) \le \sum_{\mu=1}^{p} T_{f_\mu}(r,\infty).$$

1.3 Định lý cơ bản thứ nhất

Định lý 1.6 ([12]). *Cho $f \not\equiv 0$ là một hàm phân hình trong hình tròn $\{|z| \le R\}$, $0 < R \le \infty$, a là số phức tuỳ ý. Khi đó, với mỗi $0 \le r < R$, ta có*

(i) $T_f(r) = m_f(r,0) + N_f(r,0) + \log|c_f|.$ (1.2)

(ii) *Với mỗi số phức $a \in \mathbb{C}$,*

$$|T_f(r) - m_f(r,a) - N_f(r,a)| \le |\log|c_{\frac{1}{f-a}}|| + \log^+|a| + \log 2,$$

trong đó c_f là hệ số khác 0 nhỏ nhất trong khai triển Taylo của hàm f trong lân cận của điểm 0, $c_{\frac{1}{f-a}}$ là hệ số khác 0 nhỏ nhất trong khai triển Taylo của hàm $\dfrac{1}{f-a}$ trong lân cận của điểm 0.