ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

HIỆU CHỈNH TÌM NGHIỆM CHUNG CỦA MỘT HỌ HỮU HẠN PHƯƠNG TRÌNH VỚI ÁNH XẠ LIÊN TỤC LIPSCHITZ VÀ J-ĐƠN ĐIỆU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán Ứng Dụng
Mã số: **60.46.01.12**

Học viên thực hiện: Quách Thị Yến
Lớp: Cao học Toán K6C

Giảng viên hướng dẫn: GS. TS Nguyễn Bường

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nghiêm túc của GS.TS. Nguyễn Bường (Viện Công nghệ thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và kính chúc Thầy cùng gia đình luôn luôn mạnh khỏe.

Tôi xin chân thành cảm ơn các quý thầy, cô giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên và tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã mang lại cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và quan tâm giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu.

Tôi cũng xin cảm ơn các bạn đồng môn đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 9 - 2014
Người viết Luận văn

Quách Thị Yến

Một số kí hiệu và chữ viết tắt

E^*	Không gian liên hợp của không gian Banach E.
$A^* : Y^* \to X^*$	Toán tử đối ngẫu của toán tử tuyến tính $A : X \to Y$.
I	Toán tử đơn vị
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A.
$R(A)$	Miền ảnh của toán tử A.
A^{-1}	Toán tử ngược của toán tử A.
$\langle x, y\rangle$	Tích vô hướng của x và y trong không gian Hilbert.
$\|x\|_E$	Chuẩn của x trong không gian E.
$\emptyset$	Tập rỗng.
$x_n \rightharpoonup x$	Dãy x_n hội tụ yếu tới x.
$x_n \to x$	Dãy x_n hội tụ mạnh x.
θ	Phần tử không trong không gian Banach.

Mở đầu

Nhiều vấn đề trong thực tế chúng ta gặp phải như khoa học, công nghệ, kinh tế, ..., tồn tại một lớp các bài toán mà nghiệm không ổn định theo nghĩa một thay đổi nhỏ của dữ liệu đầu vào sẽ dẫn đến những thay đổi lớn của dữ liệu đầu ra (nghiệm của bài toán), thậm chí còn làm cho bài toán trở lên vô nghiệm. Người ta nói những bài toán đó không chính quy hay đặt không chỉnh. Vì vậy cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.

Do tầm quan trọng đặc biệt của lý thuyết này mà nhiều nhà toán học nước ngoài và Việt Nam đã dành phần lớn thời gian và công sức của mình cho việc nghiên cứu các phương pháp hiệu chỉnh để giải các bài toán đặt không chỉnh. Trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi xin được trình bày đề tài: *"Hiệu chỉnh tìm nghiệm chung của một họ hữu hạn phương trình với ánh xạ liên tục Lipschitz và J-đơn điệu"*. Luận văn được tổng hợp từ bài báo của GS.TS Nguyễn Bường cùng với cộng sự Nguyễn Đình Dũng.

Mục đích của luận văn này là sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Browder-Tikhonov tìm nghiệm chung của một họ hữu hạn phương trình với toán tử $J-$ đơn điệu và liên tục Lipschitz trên không gian Banach. Trong đó giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh tìm nghiệm của họ hữu hạn phương trình khi hệ phương trình toán tử chỉ có nhiễu ở vế phải và hệ phương trình khi cả vế phải và toán tử đều có nhiễu.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các tài liệu tham khảo, bố cục của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Trình bày các khái niệm cơ bản về không gian Hilbert và không gian Banach. Tiếp theo giới thiệu bài toán đặt không chỉnh. Đồng thời cũng trình bày phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải phương trình với toán tử đơn điệu.

Chương 2. Phương pháp tìm nghiệm chung cho một họ phương trình toán tử đơn điệu, hiệu chỉnh cho hệ phương trình với toán tử J-đơn điệu và liên tục Lipschitz trên không gian Banach phản xạ và lồi chặt có chuẩn khả vi Gateaux đều.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS.TS Nguyễn Bường. Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề nghiên cứu là khá phức tạp và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên không tránh khỏi thiếu sót. Trong quá trình viết luận văn cũng như xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Các khái niệm và vấn đề cơ bản

Chương này gồm 3 mục, trình bày một số khái niệm cơ bản được sử dụng liên quan tới nội dung nghiên cứu của đề tài. Mục 1. Giới thiệu các khái niệm, tính chất, sự hội tụ trong không gian Hilbert và không gian Banach, ngoài ra còn một số định nghĩa, bổ đề, cần sử dụng để chứng minh các kết quả trong chương 2. Mục 2. Khái niệm và ví dụ về bài toán đặt không chỉnh. Mục 3. Trình bày phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán đặt không chỉnh. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [6] và [7].

1.1 Không gian Hilber và Banach

- Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Không gian tuyến tính E được gọi là không gian tiền Hilbert hay còn gọi là không gian có tích vô hướng, nếu trên E xác định một hàm thực hai biến, kí hiệu $\langle x, y\rangle$ và được gọi là tích vô hướng của x và y nếu thỏa mãn điều kiện sau:*

1. *Với mỗi $x, y \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;*

2. *Với mỗi $x, y, z \in E$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;*

3. *Với mỗi $x, y \in E$ với số thực β bất kì $\langle \beta x, y\rangle = \beta \langle x, y\rangle$;*

4. *Với mỗi $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ và $\langle x, x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.*

Với hàm $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ thì E trở thành một không gian định chuẩn. Không gian với tích vô hướng đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

- Không gian Banach

Định nghĩa 1.2. *Không gian định chuẩn là không gian tuyến tính E trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in E$ ta có một số $\| x \|$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau:*

1. $\| x \| > 0,\ \forall x \neq 0, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|,\ \forall x, y \in E,$ *(bất đẳng thức tam giác)*
3. $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \|,\ \forall x \in E,\ \alpha \in R.$

Không gian định chuẩn đầy đủ gọi là không gian Banach.

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b]$ với $1 \leq p < \infty$ là không gian Banach với chuẩn:

$$\| \varphi \| = (\int_a^b |\varphi(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}},\ \varphi \in L^p[a, b],$$

Ví dụ 1.2. Không gian Euclide n-chiều $\mathbb{R}^n$ là không gian Banach.

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ chuẩn và khoảng cách được xác định như sau:

$$\|x\| = \big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\big)^{1/2},$$

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

$$\big(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\big).$$

Định nghĩa 1.3. *Giả sử E là một không gian Banach thực và E^* là không gian đối ngẫu. Để cho đơn giản, chuẩn của E và E^* được ký hiệu bởi $\| \,.\, \|$. Cả hai có chuẩn được ký hiệu là $\langle x^*, x\rangle$. Với giá trị của phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in E^*$, $x \in E$. Một ánh xạ J từ E vào E^* được gọi là một ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E nếu:*

$$\langle x, j(x)\rangle = \| x \|.\| j(x) \|,$$

và

$$\| x \| = \| j(x) \|, \ \forall x \in X, \ j(x) \in J(X).$$

- Sự hội tụ trong không gian Banach

Trong không gian Banach E, dãy $\{x_n\} \subset E$ được gọi là hội tụ yếu tới $x \in E$, nếu với mọi $x^* \in E^*$, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^*\rangle = \langle x, x^*\rangle ,$$

Dãy hội tụ yếu được kí hiệu: $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$. Dãy $\{x_n\} \subset E$ được gọi là hội tụ mạnh tới $x \in E$ nếu nó hội tụ theo chuẩn, tức là $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$.

- Không gian phản xạ

Định nghĩa 1.4. *Giả sử E là không gian định chuẩn trên R, E^* là không gian liên hợp của E và gọi $E^{**} = L(E^*, R)$ là không gian liên hợp thứ hai của E. Ta cho tương ứng với mỗi $x \in E$ một phiếm hàm tuyến tính liên tục x^{**} trên E^{**} nhờ hệ thức*

$$\langle x^{**}, f\rangle = \langle f, x\rangle, \ \forall f \in X^{**},$$

ở đây $\langle f, x\rangle$ là kí hiệu giá trị phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in E^*$ tại $x \in E$. Ta có $\| x \| = \| x^{**} \|$. Đặt $h(x) = x^{**}$, nếu $h : E \to E^{**}$ là toàn ánh thì không gian E được gọi là không gian phản xạ.

Ví dụ 1.3. Ta có $(R^n)^* = R^n$ suy ra $(R^n)^{**} = ((R^n)^*)^* = (R^n)^* = R^n$. Và phép nhúng chuẩn tắc $H : R^n \longrightarrow (R^n)^{**}$ là một đơn ánh tuyến tính vì H là một phép đẳng cự tuyến tính. Do đó H là toàn ánh tuyến tính. Vậy R^n là không gian phản xạ.

Ví dụ 1.4. Không gian $L^p[0, 1]$ với $p > 1$ là không gian phản xạ. Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều phản xạ.

- Không gian E-S (Ephimov Stechkin)

Định nghĩa 1.5. *Không gian Banach E được gọi là không gian Ephimov Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu E phản xạ và trong E sự hội tụ yếu các phần tử ($x_n \rightharpoonup x$) và sự hội tụ chuẩn ($\| x_n \| \to \| x \|$) luôn kéo theo sự hội tụ mạnh ($\| x_n - x \| \to 0$).*

Ví dụ 1.5. Không gian Hilbert có tính chất E-S

- Phiếm hàm nửa liên tục dưới

Định nghĩa 1.6. *Cho E là một không gian Banach thực phản xạ, E^* là không gian liên hợp của E. $\varphi : X \to R\bigcup\{\infty\}$ là một phiếm hàm trên E*

a) Phiếm hàm $\varphi(x)$ với $x \in E$ được gọi là lồi, nếu

$$\varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y),\ \forall\alpha \in [0,1],\ x, y \in E.$$

b) Phiếm hàm $\varphi(x)$ xác định trên không gian Banach E được gọi là nửa liên tục dưới trên E, nếu $\lim_{y\to x}\varphi(y) \leq \varphi(x), \forall x \in E$.

c) Phiếm hàm $\varphi(x)$ xác định trên không gian Banach E được gọi là nửa liên tục dưới yếu tại điểm x_0, nếu $\forall\{x_n\} : \varphi(x_0) \leq \lim\ \inf\varphi(x_n)$.

- Toán tử đơn điệu

Định nghĩa 1.7. Cho *E là không gian Banach phản xạ với không gian liên hợp của nó là E^*.Cho toán tử A với miền xác định là $D(A) \subseteq E$ và miền ảnh $R(A) \subseteq E^*$.*

a) Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu:

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in D(A),$$

b) Toán tử A được gọi là đơn điệu chặt nếu dấu bằng chỉ đạt được khi $x = y$. Trong trường hợp A là toán tử tuyến tính thì tính đơn điệu tương đương với tính không âm của toán tử.

c) Toán tử A được gọi là d-đơn điệu, nếu tồn tại một hàm không âm $d(t)$, không giảm với $t \geq 0$, $d(0) = 0$ và thỏa mãn tính chất: