ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HẢI

NGHIỆM GIẢI TÍCH VÀ NGHIỆM XẤP XỈ CỦA MỘT BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN THỊ HẢI

NGHIỆM GIẢI TÍCH VÀ NGHIỆM XẤP XỈ CỦA MỘT BÀI TOÁN BIÊN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH SONG ĐIỀU HÒA

Chuyên ngành : TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số : **60 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Giáo viên hướng dẫn
TS. LÊ TÙNG SƠN

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu

Trên thực tế nhiều bài toán trong khoa học kỹ thuật thông qua mô hình hóa tóan học được đưa đến việc giải các bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng.Phương trình đạo hàm riêng cấp cao mà tiêu biểu là phương trình song điều hòa là lớp phương trình vẫn còn đang thu hút sự quan tâm rất lớn của rất nhiều nhà cơ học, kỹ sư và nhà toán học. Trong vòng 3 thập niên qua nhiều phương pháp mới hữu hiệu giải phương trình trên đã được nghiên cứu và phát triển. Cùng với sự phát triển mạnh mẽ của máy tính điện tử, các phương pháp số đã trở thành công cụ đắc lực để giải quyết các bài toán kỹ thuật tuy nhiên vẫn có không ít tác giả đã sử dụng phương pháp gần đúng giải tích như phương pháp bình phương cực tiểu, phương pháp nghiệm cơ bản để giải lớp phương trình song điều hòa.Ngoài những phương pháp trên một số tác giả còn sử dụng phương pháp lặp để giải phương trình song điều hòa và phương pháp này cũng là phương pháp đáng lưu ý và cần nghiên cứu.

Nội dung chính của luận văn là trình bày các kết quả về lý thuyết và thực nghiệm tính toán của phương pháp tìm nghiệm cho một số bài toán biên đối với phương trình song điều hòa nhờ công cụ hỗ trợ là toán tử biên và sơ đồ lặp hai lớp của Samarski – Nikolaev.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, 3 chương nội dung,phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày hệ thống các kiến thức chuẩn bị, các kết quả bổ trợ: một số kiến thức cơ bản về không gian Sobolev, tổng quan ngắn về bài toán biên đối với phương trình đạo hàm riêng cấp hai và cấp bốn, định tính của bài toán biên đối với phương trình elliptic cấp hai và phương trình kiểu song điều hòa, phương pháp lặp hai lớp giải phương trình toán tử, sự hội tụ của sơ đồ lặp, thuật toán thu gọn khối lượng tính toán giải số bài toán biên của phương trình elliptic cấp hai trên miền hình chữ nhật.

Chương 2: Trình bày một phương pháp tìm nghiệm giải tích giải bài toán biên đối với phương trình song điều hòa gồm đề xuất phương pháp và các kết quả nghiên cứu khi áp dụng phương pháp cho mô hình toán của một bài toán Vật lý: mô tả sự uốn của bản mỏng với biên bị ngàm đàn hồi.

Chương 3: Trình bày tóm tắt những kết quả nghiên cứu về việc giải lặp tìm nghiệm xấp xỉ cho bài toán biên đối với phương trình song điều hòa nhờ việc sủ dụng sơ đồ lặp hai lớp của Samarski – Nikolaev. Một số thực nghiệm trên máy tính điện tử.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa hoc – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS Lê Tùng Sơn – Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và sự nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình tôi thực hiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và quý thầy cô tham gia giảng dạy lớp cao học Toán khóa 6 (2012-2014) đã quan tâm giúp đỡ và mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Cao đẳng công nghệ và kinh tế công nghiệp, các đồng nghiệp trường Cao đẳng công nghệ và kinh tế công nghiệp đã tạo điều kiện cho tôi được học tập và hoàn thành khóa học này.

Do thời gian có hạn nên luận văn mới chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu đã có theo chủ đề đặt ra. Trong quá trình viết luận văn chắc chắn không thể tránh khỏi sai sót rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc để luận văn hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 11 tháng 10 năm 2014.

Người thực hiện

Trần Thị Hải

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Các kiến thức trình bày trong chương này để sử dụng trong các chương sau được tham khảo từ các tài liệu [2], [3], [4], [8], [14], [16].

1.1 Không gian Sobolev

1.1.1 Không gian $\mathrm{W}^{1,p}$

Định nghĩa 1.1. *Cho Ω là một miền giới nội trong $R^n, p \in R, 1 \leq p \leq +\infty$, ta định nghĩa*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathrm{R} | f; \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathrm{R} | f; \exists C \in \mathrm{R}_{+}^{*} : |f(x)| < C, \forall x \in \Omega \}.$$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathrm{R} | f \in L^p(U), \forall U : \overline{U} \subset \Omega \right\}.$$

Định lý 1.2. *Cho $p \in R, 1 \leq p \leq +\infty$, $L^p(\Omega)$ là một không gian Banach với chuẩn*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \ p < +\infty \\ \inf\{\mathrm{C}, |f(x)| \leq C, x \in \Omega\}, p = +\infty \end{cases}$$

Với $p = 2$, $L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

.

Định lý 1.3. *Không gian $L^2(\Omega)$ là tách được với $1 \leq p < +\infty$, lồi đều với $1 < p < +\infty$.*

Bất đẳng thức Holder Cho $1 \leq p \leq +\infty$, p' là số liên hợp của số p, nghĩa là

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}, \quad 1 < p < +\infty, \\ &p' = 1, \qquad\quad p' = +\infty, \\ &p' = +\infty, \qquad p = 1. \end{aligned}$$

Khi đó $\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}, \forall f \in L^p(\Omega), g \in L^{p'}(\Omega)$.
Với $p = 2$ ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwartz.
Hệ quả 1.1. Với $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ thì $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ và $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^q(\Omega)}$, trong đó hằng số C phụ thuộc vào p, q.

Định lý 1.4. *Cho $1 \leq p \leq +\infty$ và p' là số liên hợp với p, $f \in [L^p(\Omega)]^*$, khi đó tồn tại duy nhất $g \in L^{p'}(\Omega)$ sao cho*

$$(f, \varphi)_{[L^p(\Omega)]^*, L^p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in L^p(\Omega),$$

hơn nữa $\|g\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|f\|_{[L^p(\Omega)]^*}$.

1.1.2 Đạo hàm suy rộng và không gian $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$

Cho Ω là một miền giới nội trong R^n, $(n = 1, 2, ...)$, kí hiệu

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

là đa chỉ số với các thành phần α_i là các số nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, p \geq 1, f \in L^p(U)$ với mọi tập con mở $U \subset \Omega$, $\overline{U} \subset \Omega$ và $C_0^\infty(\Omega)$ là tập các hàm f khả vi vô hạn lần trên Ω sao cho supp$f \subset \Omega$, trong đó supp$f$ là giá trị của hàm f.

Cho $u, \omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ thì ω được gọi là đạo hàm suy rộng của u bậc α nếu

$$\int\limits_{\Omega} uD^\alpha\varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} \omega\varphi dx, \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Kí hiệu $\omega = D^\alpha u$.

Định nghĩa 1.5. *Không gian Sobolev* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$, *trong đó m là một số nguyên dương, được xác định bởi*

$$\mathrm{W}^{m,p}(\Omega) = \{u|\, u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

với $m = 0$, *đặt* $\mathrm{W}^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, *với* $p = 2$, *kí hiệu* $\mathrm{W}^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Định lý 1.6. *Không gian* $\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)$ *là không gian Banach tương ứng với chuẩn*

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty.$$

Không gian $H^m(\Omega)$ *là một không gian Hilbert với tích vô hướng*

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}, \forall f, g \in H^m(\Omega).$$

Định lý 1.7. ***Định lý Nhúng*** *(The Sobolev imbedding Theorem). Cho* Ω *là một miền giới nội trong* R^n *có biên khả vi lớp* C^1. *Khi đó*
a) Nếu $n \geq 3$ *thì* $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right]$,
b) Nếu $n = 2$ *thì* $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega), q \geq 1$,
c) $H^m(\Omega) \subset C^{\left[m - \frac{n}{2} - \varepsilon\right]}(\Omega), \varepsilon > 0$,
trong đó các toán tử nhúng trong a), b), c) là compact.

Hệ quả 2.1. Với $m_1 > m > 0$, ta có

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) = H^0(\Omega).$$

Định lý 1.8. ***Định lý về tính trù mật***. *Cho* $1 \leq p < +\infty$, $D\left(R^n\right)$ *là tập các hàm có giá compact trong* R^n *khi đó* $D\left(R^n\right)$ *trù mật trong* $\mathrm{W}^{1,p}(R^n)$, *hơn nữa nếu* $\partial\Omega$ *là liên tục Lipschitz thì* $D(\overline{\Omega})$ *trù mật trong* $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)$.

Định lý 1.9. ***Định lý về sự thác triển***. *Giả sử* $\partial\Omega$ *là liên tục Lipschitz, khi đó tồn tại một toán tử thác triển tuyến tính liên tục P từ* $H^1(\Omega)$ *vào* $H^1(R^n)$ *thỏa mãn*
i) $P_u = u$ *trên* Ω,
ii) $\|P_u\|_{L^2(R^n)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$
iii) $\|P_u\|_{H^1(R^n)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$

1.1.3 Không gian $H^s(\Omega), s \in R$

Trong mục này, ta đưa định nghĩa các không gian $H^s(\Omega)$ với s không nguyên. Xét không gian

$$S(R^n) = \left\{ u \in C^\infty(R^n) | \, \forall \alpha, \beta > 0, \left| x^\alpha D^\beta u \right| \le C_{\alpha,\beta} \right\},$$

trong đó $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$. Trong $S(R^n)$ xét chuẩn sau

$$\|u\|^2_{S(R^n)} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi, \tag{1.1}$$

$\widehat{u}$ là biến đổi Fourier của u tại điểm ξ,

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i(x,\xi)} \mathrm{u}(x) dx.$$

Định nghĩa 1.10. *Không gian Sobolev $H^s(R^n)$ với $s \in R$ được xác định bởi*

$$H^s(R^n) = \overline{S(R^n)},$$

trong đó bao đóng được lấy theo chuẩn (1.1).

Định nghĩa 1.11. *Không gian Sobolev $H_0^s(\Omega)$, trong đó Ω là một miền giới nội nào đó trong R^n được xác định bởi*

$$H_0^s(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)},$$

trong đó $C_0^\infty(\Omega)$ là tập các hàm khả vi vô hạn lần có giá compact trên Ω và bao đóng được lấy theo chuẩn (1.1).

Định nghĩa 1.12. *Không gian Sobolev $H^s(\Omega)$ với s không nguyên được xác định bởi*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \| \, \exists \widetilde{u} \in H^s(R^n), \widetilde{u}|_\Omega = u, (\widetilde{u}, \varphi) = (u, \varphi), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\},$$

trong đó

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\widetilde{u}|_\Omega = u} \|\widetilde{u}\|_{H^s(R^n)}.$$

1.1.4 Vết của hàm trên biên

Định lý 1.13. ***Định lý vết***. *Giả sử Ω là một miền mở trong R^n có biên $\partial\Omega$ là liên tục Lipschitz, khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính liên tục*

$$\lambda : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$

sao cho với bất kỳ $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ta có $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.
Hàm $\gamma(u)$ được gọi là Vết của u trên $\partial\Omega$.

Định lý 1.14. *Giả sử $\partial\Omega$ là liên tục Lipschitz, khi đó*
i) $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} |u(x)|^2 ds_x + \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|} ds_x ds_y.$$

ii) Tồn tại một hằng số $C_\gamma(\Omega)$ được gọi là hằng số của Vết.
iii) Nhúng $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ là compact
iv) Tập $\{u|_{\partial\Omega}, u \in C^\infty(R^n)\}$ trù mật trong $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.
v) Tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục

$$g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to u_g \in H^1(\Omega),$$

với $\gamma(u_g) = g$ và tồn tại hằng số $C_1(\Omega)$ chỉ phụ thuộc vào miền Ω sao cho

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1(\Omega)\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Công thức Green. Giả sử $\partial\Omega$ liên tục Lipschitz, cho $u, v \in H^1(\Omega)$, khi đó:

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} \gamma(u)\gamma(v) n_i ds,$$

với $1 \leq i \leq N$, trong đó $n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ là véctơ pháp tuyến ngoài của Ω.

Bất đẳng thức Poincare. Tồn tại một hằng số C_Ω sao cho

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

trong đó , $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, C_Ω là hằng số phụ thuộc vào đường kính của Ω, được gọi là hằng số Poincare và

$$H^1_0(\Omega) = \{u | u \in H^1(\Omega), \gamma(u) = 0\},$$