KHAI THÁC MỐI LIÊN HỆ GIỮA HÌNH HỌC XẠ ẢNH VỚI HÌNH HỌC SƠ CẤP TRONG DẠY HỌC NỘI DUNG HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Trần Việt Cường*
Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài báo này, chúng tôi đề cập tới việc khai thác mối liên hệ giữa hình học xạ ảnh với hình học sơ cấp, dùng các kiến thức của hình học xạ ảnh nhằm soi sáng, định hướng cho lời giải sơ cấp của bài toán hình học đã cho hoặc khai thác mối liên hệ giữa chúng để sáng tạo ra các bài toán hình học mới trong chương trình phổ thông.

Từ khoá: *Hình học xạ ảnh, hình học sơ cấp, dạy học, giáo viên, học sinh*

ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta đã biết, từ một không gian Afin ta có thể xây dựng được một mô hình của không gian xạ ảnh bằng cách thêm vào không gian afin những "điểm vô tận". Ngược lại, nếu ta có một không gian xạ ảnh thì bằng cách bỏ đi một siêu phẳng nào đó (xem như một siêu phẳng vô tận) ta có thể xây dựng phần còn lại thành một mô hình xạ ảnh của không gian afin hoặc mô hình xạ ảnh của không gian Euclid.

Như vậy, giữa không gian afin, không gian Euclid và không gian xạ ảnh có mối quan hệ mật thiết với nhau. Do đó, giữa hình học afin (HHAF), hình học Euclid và hình học xạ ảnh (HHXA) cũng có sự liên quan với nhau.

Không gian Euclid hai chiều (E^2) và không gian Euclid ba chiều (E^3) được trình bày ở trường Trung học phổ thông (THPT) là những không gian afin theo thứ tự liên kết với các không gian vectơ Euclid hai chiều $\vec{E}^2$ và ba chiều $\vec{E}^3$.

Bài báo này, chúng tôi tập trung vào việc nghiên cứu mối liên hệ giữa HHXA với HHAF và hình học Euclid nhằm nghiên cứu, khai thác và vận dụng mối liên hệ giữa nội dung HHXA với nội dung HHSC trong dạy học hình học ở trường phổ thông. Qua đó, giúp cho người giáo viên (GV) toán ở trường phổ thông và sinh viên sư phạm toán hiểu rõ được bản chất, cội nguồn của các kiến thức của HHSC ở trường phổ thông, cũng như thấy được mối quan hệ giữa nội dung kiến thức hình học cao cấp được học ở các trường sư phạm với nội dung kiến thức HHSC ở trường phổ thông.

NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Từ kết quả của HHAF suy ra kết quả của HHXA

Giả sử ta có một định lý về các đối tượng nào đó của không gian afin. Bằng cách thêm vào không gian afin đó các điểm vô tận, ta được một không gian xạ ảnh, những đối tượng của không gian afin trở thành đối tượng của không gian xạ ảnh và định lý đã cho trở thành một định lý của HHXA. Do ta chỉ có một cách là thêm các điểm vô tận vào không gian afin nên từ một định lý trong HHAF ta chỉ suy ra được duy nhất một định lý của HHXA. Bằng cách này ta có thể suy ra một kết quả của HHXA nhờ một kết quả đã biết của HHAF.

Ví dụ: Ta đã biết định lý sau của HHSC: *"Trong một hình bình hành, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"*. Nếu thêm các điểm vô tận vào mặt phẳng afin thì các cạnh song song của hình bình hành đều có điểm chung là điểm vô tận. Do đó, hình bình hành trở thành hình bốn cạnh toàn phần của mặt phẳng xạ ảnh. Trung điểm của một đoạn thẳng sẽ trở thành điểm cùng với điểm vô tận (trên đường chứa đoạn thẳng đó) liên hợp điều hoà với hai đầu mút của đoạn thẳng đã cho. Do đó, định lý nói trên về hình bình hành sẽ trở thành một định lý của HHXA về hình bốn cạnh toàn phần mà ta đã biết: *"Trong một*

* *Tel: 0978 626727, Email: tranvietcuong2006@gmail.com*

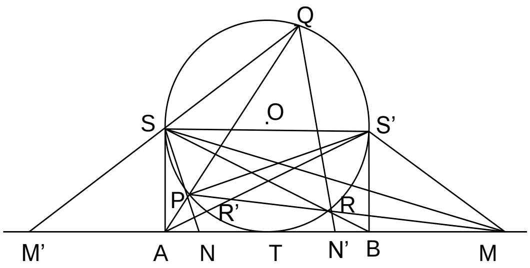
hình bốn cạnh toàn phần, các đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại liên hợp điều hoà".

Bằng cách này, ta có thể đưa việc giải một bài toán của HHSC bằng việc giải một bài toán tương ứng theo kiến thức của HHXA. Nói cách khác, ta có thể sử dụng các kiến thức của HHXA để "soi sáng" các kiến thức của HHSC.

Ví dụ: *Trên một tiếp tuyến t của một đường tròn (O) lấy hai điểm A và B đối xứng với nhau qua tiếp điểm T. Từ A và B kẻ hai cát tuyến APQ, BRS cắt đường tròn (O) lần lượt tại P, Q và R, S. Gọi M, M', N, N' tương ứng là các giao điểm của PR, QS, PS, QR với t. Chứng minh rằng T là trung điểm của các đoạn thẳng MM' và NN'.*

Chứng minh.

Cách 1 (Sử dụng kiến thức của HHSC). Dựng cát tuyến AR'S' đối xứng với BRS qua OT (Hình 1). Theo tính chất của phép đối xứng trục OT ta có SS' // AB và AS = BS' (1). Suy ra, tứ giác ABS'S là hình thang cân. Do đó, ∠M'AS = ∠MBS' (2).



Hình 1

Do ∠S'AB = ∠S'SB = ∠S'PM nên MAPS' là tứ giác nội tiếp. Do đó, ta có

∠AMS' = ∠S'PG = ∠S'SQ = ∠SM'A (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có ΔM'S'A = ΔMSB.

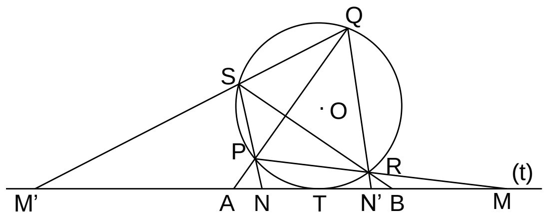
Suy ra MA' = BM => M'T = MT hay T là trung điểm MM'.

Chứng minh tương tự, T là trung điểm NN'.

Cách 2 (Sử dụng kiến thức của HHXA): Bốn điểm phân biệt P, Q, R và S là các điểm chung của một chùm đường cong bậc hai. Nói khác đi, chúng xác định một chùm đường cong bậc hai (C) (Hình 2). Trong chùm này có một đường cong không suy biến là đường tròn (O) và ba đường cong suy biến, đó là ba cặp đường thẳng (PQ, RS); (PR,QS) và (PS, QR) chứa ba cặp cạnh đối diện của hình tứ điểm {P, Q, R, S}.

Theo định lý Đơdac II, đường tròn (O) và ba cặp đường thẳng nói trên xác định trên tiếp tuyến t tại T của đường tròn (O) các cặp điểm tương ứng (T, T), (A, B), (M, M') và (N, N') của một phép biến đổi xạ ảnh đối hợp loại hypebolic trên t.

Vì $(A,B,T,\infty)=-1=(B,A,T,\infty)$ nên ta có $(M,M',T,\infty)=(N,N',T,\infty)=(A,B,T,\infty)=-1$ Suy ra, T là trung điểm của các đoạn thẳng MM' và NN'.



Hình 2

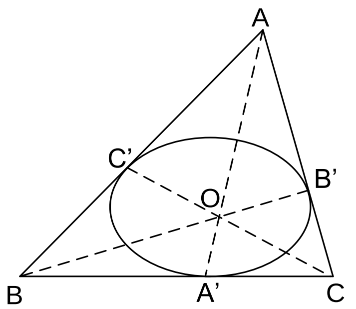
Từ kết quả của HHXA suy ra các kết quả của HHSC

Giả sử có một định lý về một đối tượng nào đó trong không gian xạ ảnh. Bằng cách bỏ đi một siêu phẳng nào đó ta được một không gian afin và định lý nói trên sẽ trở thành một định lý của HHAF. Do có thể bỏ đi bất kỳ một siêu phẳng nào đó nên từ một kết quả trong HHXA, ta có thể thu được nhiều kết quả khác nhau trong HHAF.

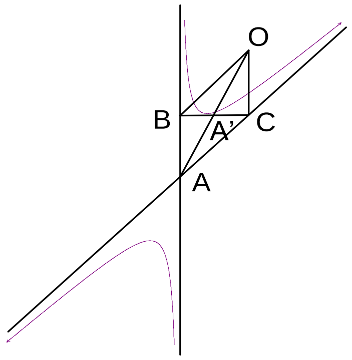
Ví dụ "*Nếu tam giác ABC ngoại tiếp một đường conic (S) thì các đường thẳng nối đỉnh của tam giác với tiếp điểm trên cạnh đối diện sẽ đi qua một điểm"*

Trên hình vẽ ta có các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm O.

- Nếu ta chọn đường thẳng B'C' là đường thẳng vô tận thì đường conic (S) trở thành một đường Hypebol với hai đường tiệm cận là AB và AC. Khi đó, ta có AB // OC và AC // OB. Do đó, ABOC là hình bình hành với A' là giao điểm của hai đường chéo. Suy ra $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$. Do đó ta đi đến kết quả sau của HHAF *"Hai đường tiệm cận của một đường Hypebol chắn trên một tiếp tuyến bất kỳ một đoạn thẳng nào mà tiếp điểm chính là trung điểm" (Hình 4).*

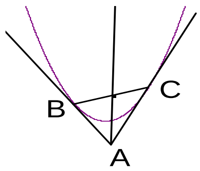


Hình 3



Hình 4

- Nếu ta chọn đường thẳng BC làm đường thẳng vô tận thì đường conic (S) trở thành một đường Parabol mà AA' là một đường kính, còn AB'OC' là một hình bình hành. Do đó, ta có kết quả sau: *"Nếu từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với một Parabol thì đường kính của Parabol liên hợp với phương xác định bởi vectơ BC sẽ phải đi qua A" (Hình 5).*

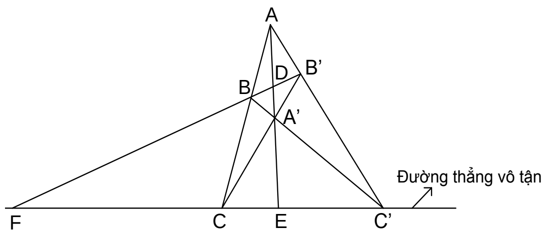


Hình 5

Cũng do từ một bài toán của HHXA có thể suy ra nhiều bài toán của HHAF nên bằng cách chọn siêu phẳng vô tận một cách thích hợp ta có thể chuyển một bài toán của HHXA thành một bài toán của HHAF mà cách giải dễ thực hiện hơn.

Ví dụ. *Chứng minh rằng: Trong một hình bốn cạnh toàn phần, trên mỗi đường chéo hai đỉnh đối diện và hai điểm chéo liên hợp điều hoà với nhau.*

Ta có thể giải bài toán này bằng công cụ của HHXA. Tuy nhiên, ở đây chúng ta sử dụng mô hình afin của không gian xạ ảnh để giải bài toán này.



Hình 6

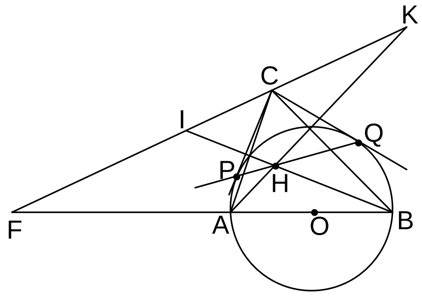
Chọn siêu phẳng vô tận P^{n-1} đi qua hai điểm C, C' và không đi qua một đỉnh nào khác nữa của hình bốn cạnh toàn phần. Khi đó, AB // A'B', AB' // A'B. Suy ra, ABA'B' là hình bình hành của không gian afin A^n. Theo kết quả của HHAF ta có điểm chéo D là trung điểm của AA' và BB'. Vì vậy, điểm D cùng với điểm E vô tận liên hợp điều hoà với hai điểm A và A'. Trên đường chéo BB', điểm D cùng với điểm vô tận F liên hợp điều hoà với hai điểm B và B'. Do đó, ta có (AA'DE) = (DAA') = -1 và (BB'DF) = (DBB') = -1.

Việc nắm vững kiến thức của HHXA, vận dụng mối quan hệ giữa HHXA với HHAF chúng ta có thể định hướng cho lời giải sơ cấp của những bài toán afin.

Ví dụ: *Gọi H là trực tâm của tam giác nhọn ABC. Qua C dựng các tiếp tuyến CP, CQ với đường tròn (O), đường kính AB (P, Q là các tiếp điểm). Chứng minh rằng ba điểm P, Q và H thẳng hàng.*

Lời giải 1: (*Theo góc độ của HHXA*). Gọi D = BC ∩ AH, E = CA ∩ BH, F = DE ∩ AB, I =

BE ∩ CF, K = AD ∩ CF. Xét tứ giác toàn phần ABDECF ta có [ADHK] = [CFKI] = [BEIH] = -1. Suy ra, H liên hợp điều hoà với I và K đối với đường tròn (O). Do đó, IK là đường đối cực của H, nên C liên hợp với H đối với đường tròn (O). Mặt khác, PQ là đường đối cực của C, suy ra H thuộc PQ hay P, Q và H là ba điểm thẳng hàng.



Hình 7

Ta thấy, PQ là đường đối cực của C, mà C liên hợp với H đối với đường tròn (O), nên H thuộc PQ, suy ra H, P, Q thẳng hàng. Vậy để chứng minh H, P, Q thẳng hàng, ta chứng minh H thuộc đường thẳng PQ. Điều đó gợi ý cho ta thấy H nằm trên trục đẳng phương PQ của hai đường tròn nào đó và ta có thể đưa ra lời giải sơ cấp bài toán trên.

Lời giải 2 (*Theo góc độ của HHSC*)*:* Ta có, các điểm C, P, F, O và Q cùng nằm trên đường tròn (ω) đường kính OC (hình 8). Do đó, ta có:

$$P(H)/(\omega) = HC.HF$$

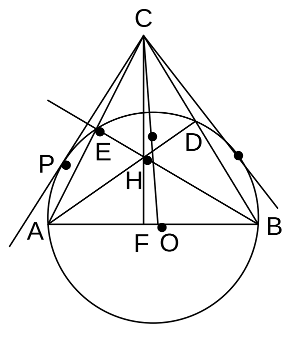
$$P(H)/(O) = HA.\,HD = HB.HE.$$

Mặt khác, H là trực tâm của ΔABC nên ta có HA.HD = HB.HE = HC.HF.

Suy ra P(H)/(ω) = P(H)/(O) hay H thuộc trục đẳng phương PQ của (ω) và (O) . Vậy P, Q và H là ba điểm thẳng hàng.

Sáng tạo các bài toán mới

Từ một bài toán của HHAF ta có thể suy ra một bài toán của HHXA bằng cách bổ sung thêm vào không gian afin này những điểm vô tận thuộc một siêu phẳng vô tận. Ngược lại, từ một bài toán của HHXA, bằng cách chọn các siêu phẳng khác nhau đóng vai trò siêu phẳng vô tận, ta có thể *có nhiều* bài toán của HHAF khác mà các kết quả ta có thể suy ra từ những kết quả đã biết trong HHXA. Kết hợp cả hai cách làm này ta có thể *từ một bài toán sơ cấp suy ra nhiều bài toán sơ cấp khác*.



Hình 8

Việc nắm vững kiến thức HHXA, người giáo viên (GV) toán THPT có một mảnh đất "màu mỡ" để sáng tạo ra các bài toán cho học sinh của mình luyện tập. Do đó, một GV THPT với kiến thức về HHXA được trang bị khi còn là sinh viên ở trường Sư phạm có thể dễ dàng đưa một số bài toán HHSC ở trường phổ thông về bài toán của HHXA, dùng kiến thức HHXA soi sáng, định hướng cho lời giải sơ cấp của bài toán đã cho, hơn thế nữa từ bài toán của HHXA tương ứng, GV đó có thể tạo ra được nhiều bài toán sơ cấp có mối liên hệ với bài toán ban đầu theo con đường:

Từ bài toán trong $E^2 \xrightarrow{\text{Afin hoá}}$ *bài toán trong* $A^2 \xrightarrow{\text{xạ ảnh hoá}}$ *Bài toán trong* P^2 $\xrightarrow{\text{Afin hoá}}$ *Các bài toán trong* A^2 $\xrightarrow{\text{Trực chuẩn hoá}}$ *Các bài toán trong* E^2.

Đó là sự thể hiện của mối liên hệ chặt chẽ giữa toán học phổ thông với toán học cao cấp theo các con đường: Toán học cao cấp → Toán học phổ thông *hoặc* Toán học phổ thông → Toán học cao cấp → Toán học phổ thông.

Tất nhiên, những người có thể đi theo con đường này chỉ phù hợp là những sinh viên sư phạm - những người GV trong tương lai và những GV đang trực tiếp giảng dạy ở các trường phổ thông. Làm được như thế, sinh viên sẽ nắm sâu sắc các kiến thức toán cao cấp, thấy được mối liên hệ với toán học phổ thông, góp phần làm tốt khâu chuẩn bị nghề nghiệp sau này và chắc chắn sẽ có kết quả tốt trong các kì thi của mình. Còn đối với những GV phổ thông, đi theo con đường đó là một cách để nâng cao trình độ chuyên môn nghiệp vụ của mình, nâng cao hiệu quả dạy học và tất nhiên những học sinh được học những người thầy như vậy sẽ có nhiều cơ hội được luyện tập, khắc sâu và được khai thác, mở rộng kiến thức từ một dạng toán đã cho.

KẾT LUẬN

Từ những phân tích trên, cho chúng ta thấy: Giữa nội dung HHXA được học ở các trường Sư phạm và nội dung HHSC được học trong chương trình phổ thông có mối quan hệ mật thiết với nhau. Do đó, nếu người GV biết cách khai thác, vận dụng linh hoạt mối quan hệ đó vào việc dạy học hình học ở phổ thông thì sẽ góp phần nâng cao hiệu quả dạy học cho học sinh.

Hơn nữa, để nâng cao chất lượng người GV trong tương lai, trong quá trình giảng dạy, các giảng viên bộ môn hình học cần dành thời gian để phân tích cho sinh viên thấy được mối quan hệ giữa nội dung HHXA với nội dung HHSC trong chương trình phổ thông, qua đó giúp cho các sinh viên sư phạm toán hiểu rõ được bản chất, cội nguồn của các kiến thức của HHSC ở trường phổ thông, cũng như thấy được mối quan hệ giữa nội dung kiến thức hình học cao cấp được học ở các trường sư phạm với nội dung kiến thức HHSC ở trường phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phạm Bình Đô (2006), *Bài tập hình học xạ ảnh*, Nxb Đại học Sư phạm.
2. Văn Như Cương (1999), *Hình học Xạ ảnh,* Nxb Giáo dục.
3. Văn Như Cương, Tạ Mân (1998), *HHAF và hình học Euclid,* Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
4. Trần Việt Cường, Nguyễn Danh Nam (2013), *Giáo trình HHSC,* Nxb Giáo dục Việt Nam.
5. Nguyễn Mộng Hy *(1999)*, *Hình học cao cấp*, Nxb Giáo dục.
6. Nguyễn Thị Minh Yến *(2006)*, *Xây dựng một số chuyên đề "cầu nối" giữa hình học cao cấp ở trường Cao đẳng Sư phạm với hình học ở phổ thông nhằm tăng cường định hướng sư phạm cho sinh viên*, Luận văn Thạc sĩ Khoa học giáo dục.

SUMMARY

APPLICATION ON THE RELATIONSHIP BETWEEN PROJECTIVE GEOMETRY AND PRIMARY GEOMETRY IN THE GEOMETRY TEACHING AT THE HIGH SCHOOL

Tran Viet Cuong*
College of Education - TNU

In this paper, we refer to the application on the relationship between projective geometry and primary geometry, using the knowledge of projective geometry to lighten, to guide the primary solution of given geometry problem or application on their relationship to create new geometry problems in school programs

Keyword: *projective geometry, primary geometry, teaching, teacher, student*

Ngày nhận bài:31/1/2014; Ngày phản biện:24/2/2014; Ngày duyệt đăng: 09/6/2014
Phản biện khoa học: *TS. Đỗ Thị Trinh – Trường Đại học Sư phạm - ĐHTN*

* *Tel: 0978 626727, Email: tranvietcuong2006@gmail.com*