VẬN DỤNG KHÁI NIỆM "TỰA ĐỐI NGẪU" TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

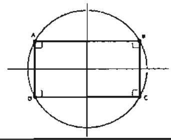
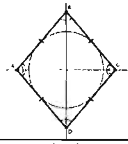
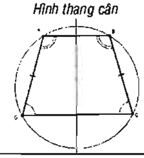
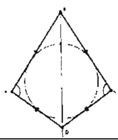
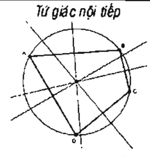
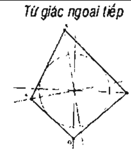
TS. NGUYỄN DANH NAM*

1. Khái niệm "tựa đối ngẫu" (TĐN) trong hình học ở trường phổ thông

Hai định lí (hay hai hình) được gọi là *đối ngẫu* với nhau nếu định lí (hình) này có thể chuyển thành định lí (hình) kia bằng cách thay đổi các khái niệm ban đầu bởi khái niệm đối ngẫu với nó. Đối ngẫu thường xuất hiện nhiều trong hình học xạ ảnh, đại số Boole, lí thuyết đồ thị, lí thuyết các khối đa diện đều,... Ví dụ: *điểm* và *đường thẳng* là hai khái niệm đối ngẫu với nhau trong hình học xạ ảnh. Đối với hình học Ơclít ở phổ thông, đối ngẫu được hiểu theo cách hạn chế và linh hoạt hơn; chẳng hạn, góc và cạnh, đường phân giác (quỹ tích các điểm cách đều hai cạnh của một góc) và đường trung trực (quỹ tích các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng). Các quy tắc (khái niệm) đối ngẫu này không còn đúng đối với các định lí liên quan đến tiên đề V của hình học Ơclít. Do đó, chúng tôi tạm gọi là quy tắc (khái niệm) "tựa đối ngẫu". Kết luận rút ra từ những quy tắc "tựa đối ngẫu" không phải lúc nào cũng đúng; ví dụ: **TĐN** của định lí *"Ba cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau"* là *"Ba góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau"* không đúng vì hai tam giác có thể đồng dạng với nhau. Trên cơ sở đó, chúng tôi đưa ra định nghĩa sau:

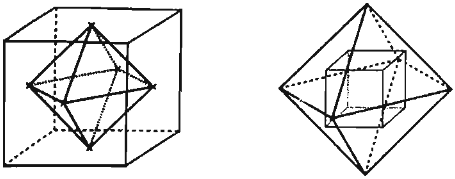
Định nghĩa: *"Tựa đối ngẫu" là quy tắc đối ngẫu bị "hạn chế" trong hình học Ơclít. Thông qua quy tắc này, các khái niệm, định lí, cấu trúc toán học được chuyển sang khái niệm, định lí hay cấu trúc toán học khác, giúp học sinh (HS) ở trường phổ thông có một cách nhìn mới về các mối quan hệ trong toán học.*

Dựa vào cặp khái niệm TĐN như: cạnh và góc, chúng ta có thể liệt kê một số khái niệm TĐN với nhau: hình vuông là hình tự TĐN (vì nó có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau), hình bình hành cũng là hình tự TĐN (vì các cạnh đối diện và các góc đối diện với nhau cũng bằng nhau). Tương tự, *hình chữ nhật* và *hình thoi*, *hình thang cân* và *hình cánh diều*, *tứ giác nội tiếp* và *tứ giác ngoại tiếp* TĐN với nhau từng đôi một. Chúng ta quan sát bảng dưới đây:

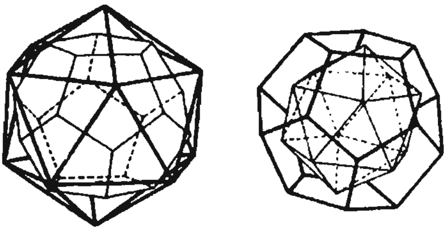
Hình chữ nhật	*Hình thoi*
	
Tất cả các *góc* đều bằng nhau	Tất cả các *cạnh* đều bằng nhau
Khoảng cách từ tâm đến các đỉnh bằng nhau, do đó có *đường tròn ngoại tiếp*	Khoảng cách từ tâm đến các cạnh bằng nhau, do đó có *đường tròn nội tiếp*
Các trục đối xứng của hình chia đôi cặp *cạnh* đối diện	Các trục đối xứng của hình chia đôi các cặp *góc* đối diện
Hình thang cân	*Hình cánh diều*
	
Tồn tại hai cặp *góc* kề bằng nhau	Tồn tại hai cặp *cạnh* kề bằng nhau
Một cặp *cạnh* đối diện bằng nhau	Một cặp *góc* đối diện bằng nhau
Tồn tại *đường tròn ngoại tiếp*	Tồn tại *đường tròn nội tiếp*
Trục đối xứng chia đôi một cặp *cạnh* đối diện	Trục đối xứng chia đôi một cặp *góc* đối diện
Tứ giác nội tiếp	*Tứ giác ngoại tiếp*
	
Tồn tại *đường tròn ngoại tiếp*	Tồn tại *đường tròn nội tiếp*
Các *đường trung trực* của các cạnh cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp	Các *đường phân giác* của các góc cắt nhau tại tâm của đường tròn nội tiếp

Trong lí thuyết về các khối đa diện đều, khái niệm TĐN còn giúp chúng ta thấy rõ hơn mối quan hệ giữa các hình khối này. Tứ diện đều là hình tự TĐN, hình lập phương và hình bát diện đều **TĐN** với nhau, hình thập nhị diện đều và hình nhị thập diện đều TĐN với nhau. Từ đó, ta có thể suy ra kết quả: *Tâm các mặt của một hình lập phương chính là đỉnh của một hình bát diện đều, ngược lại, tâm các mặt của một hình bát diện đều là đỉnh của một hình lập phương* (xem *hình 1*).

* **Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên**



Hình 1. Hình lập phương và hình bát diện đều



Hình 2. Hình thập nhị diện đều và hình nhị thập diện đều

Tương tự, ta có kết quả: *Tâm các mặt của một hình nhị thập diện đều chính là đỉnh của một hình thập nhị diện đều, ngược lại, tâm các mặt của một thập nhị diện đều là đỉnh của một hình nhị thập diện đều* (xem *hình 2*).

2. Vận dụng khái niệm TĐN trong dạy học ở trường phổ thông

1) Dùng khái niệm TĐN để phân loại, hệ thống hóa kiến thức. Từ các khái niệm TĐN như: góc - cạnh, điểm - đường thẳng, nội tiếp đường tròn - ngoại tiếp đường tròn,..., GV dễ dàng xây dựng sơ đồ giúp HS tiếp cận hoạt động phân loại tứ giác (hình tứ giác, hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình cánh diều,...). Từ đó, HS có thể nắm được tính chất đặc trưng của từng loại tứ giác.

Cũng từ mối quan hệ giữa các khái niệm, GV hướng dẫn HS tìm tòi, phát hiện tính chất mới của các đối tượng hình học mà nếu bằng thao tác tư duy toán học cơ bản sẽ không có được. Chẳng hạn, từ tính chất "hai đường chéo của hình chữ nhật *bằng nhau*" TĐN với "hai đường chéo của hình thoi *vuông góc* với nhau", có thể suy ra các tính chất sau đây: - *Trung điểm của các cạnh của một tứ giác bất kì có hai đường chéo bằng nhau tạo thành một hình thoi; - Trung điểm của các cạnh của một tứ giác bất kì có hai đường chéo vuông góc với nhau tạo thành một hình chữ nhật.*

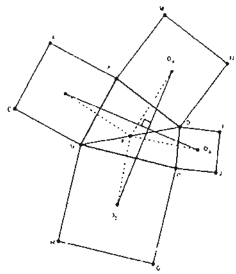
Như vậy, khái niệm TĐN giúp HS nắm được điểm đặc trưng của lớp các đối tượng hình học, từ đó phân loại và hệ thống hóa các khái niệm này.

2) Dùng định lí TĐN để mở rộng các kết quả mới. Định lí đối ngẫu trong hình học phi Ơclít hoàn toàn đúng. Tuy nhiên, đối với hình học Ơclít ở trường phổ thông, TĐN cho ta các kết quả mới cần được kiểm chứng. Điều này khuyến khích sự tìm tòi, khám phá của HS. Xét định lí Van Aubel dưới đây:

Định lí (Van Aubel): Nếu dựng ra phía ngoài một tứ giác lồi (dựng trên các cạnh của tứ giác) bốn hình vuông thì các đoạn thẳng nối tâm các hình vuông dựng trên cặp cạnh đối diện bằng nhau và vuông góc với nhau.

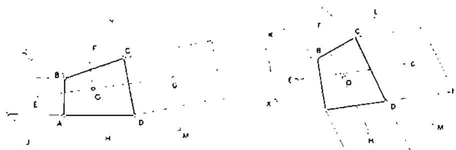
Chứng minh: Giả sử ta dựng ra ngoài tứ giác *ABCD* các hình vuông *ABEF, BCGH, CDIJ, DAMN*; gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của các hình vuông này. Gọi *P* là trung điểm của đoạn thẳng *BD*, sử dụng phép quay $Q_P^{90^0}: O_2 \to O_1; O_4 \to O_3$, suy ra $O_2O_4 = O_1O_3$ và $O_2O_4 \perp O_1O_3$ (*hình 3*).

Kết quả của định lí Van Aubel dễ dàng được tổng quát hóa nhờ sử dụng quy tắc TĐN giữa khái niệm *góc* và *cạnh* trong hình học Ơclít ở trường phổ thông (theo de Villiers, 2000a).



Hình 3. Định lí Van Aubel

Định lí 1: Nếu dựng ra phía ngoài tứ giác *ABCD* (dựng trên các cạnh) các hình chữ nhật đồng dạng (*hình 4a*) với tâm lần lượt là *E, F, G, H* thì đoạn thẳng *EG* và *FH* nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau. Hơn nữa, nếu *J, K, L, M* là trung điểm của các đoạn thẳng nối các đỉnh của hai hình chữ nhật kề nhau thì *JL* và *KM* là hai đoạn thẳng bằng nhau, đồng quy với hai đường thẳng *EG* và *FH*.



Hình 4. Định lí 1 và định lí TĐN của nó

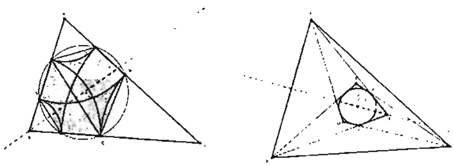
Định lí 1' (TĐN): Nếu dựng ra phía ngoài các cạnh của tứ giác *ABCD* các hình thoi đồng dạng với tâm lần lượt là *E, F, G, H* thì đoạn thẳng *EG* và *FH* bằng nhau. Hơn nữa, nếu *J, K, L, M* là trung điểm của các đoạn thẳng nối các đỉnh của hai hình thoi kề nhau (xem *hình 4b*) thì *JL* và *KM* nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Từ kết quả *định lí 1*, ta suy ra hai tính chất sau: *- Tỉ số EG/FH bằng tỉ số các cạnh của các hình chữ nhật; - Góc giữa hai đường thẳng JL và KM bằng góc giữa hai đường chéo của các hình chữ nhật đồng dạng.*

Từ kết quả *định lí 1'* (định lí TĐN), ta suy ra hai tính chất sau đây: *- Góc giữa hai đường thẳng EG và FH bằng góc giữa hai cạnh kề nhau của các hình thoi đồng dạng; - Tỉ số JL/KM bằng tỉ số của hai đường chéo của các hình thoi.*

Định lí 2: Cho $\triangle ABC$, điểm P nằm trên đoạn thẳng AB. Dựng sáu đường tròn sau: $(B, BP) \cap BC = Q$; $(C, CQ) \cap CA = R$; $(A, AR) \cap AB = S$; $(B, BS) \cap BC = T$ và $(C, CT) \cap CA = U$. Khi đó, ta có: $(A, AU) \cap AB = P$. Hơn nữa, lục giác $PSTQRU$ nội tiếp đường tròn (*hình 5a*).

Chứng minh. Vì PQB là tam giác cân với $BP = BQ$, đường trung trực của PQ chính là đường phân giác của góc B. Tương tự, các đường trung trực của QR, RS chính là đường phân giác của góc C và góc A. Vì các đường phân giác trong tam giác đồng quy nên đường trung trực của các cạnh của lục giác $PSTQRU$ cũng đồng quy. Kết quả này vẫn đúng nếu P nằm trên đường thẳng chứa cạnh AB.



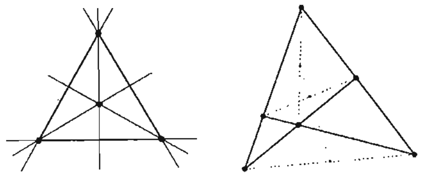
Hình 5. Định lí 2 và định lí TĐN của nó

Định lí 2 xuất phát từ điểm P tùy ý trên cạnh AB. Sử dụng thao tác tư duy TĐN, ta có *định lí 2'*.

Định lí 2' *(đối ngẫu).* Cho $\triangle ABC$. Dựng tia AP của góc A; dựng tia BP của góc B sao cho $\angle PBA = \angle PAB$; dựng tia CQ của góc C sao cho $\angle QCB = \angle PBC$ và $Q \in BP$; dựng tia AR của góc A sao cho $\angle RAC = \angle QCA$ và $R \in CQ$; dựng tia BS của góc B sao cho $\angle SBA = \angle RAB$ với $S \in AR$; dựng tia CT của góc C sao cho $\angle TCB = \angle SBC$ và $T \in BS$. Nếu điểm $U = CT \cap AP$ thì $\angle UCA = \angle UAC$ và lục giác PQRSTU ngoại tiếp đường tròn (*hình 6b*).

3) Dùng quy tắc TĐN để phát triển tính sáng tạo của HS trong giải toán. Trong quá trình dạy học toán ở phổ thông, việc vận dụng sáng tạo các thao tác tư duy giúp HS tìm tòi, khám phá tri thức mới. Kết quả các thao tác tư duy sử dụng khái niệm TĐN nói chung không đúng, tuy nhiên, nó cho phép HS lập ra giả thuyết mới dựa trên kết quả đã biết. GV cần tạo điều kiện và gợi động cơ giúp HS có thể thành lập và tự kiểm chứng các giả thuyết của mình.

Cặp khái niệm TĐN điểm - đường thẳng sẽ cho nhiều kết quả thú vị nếu chúng ta biết sử dụng quy tắc TĐN cho các đối tượng hình học đơn giản. *Ví dụ:* xét hình gồm bốn điểm (các đỉnh của tam giác đều và tâm của nó) và sáu đường thẳng (các cạnh của tam giác và đường trung trực của nó), ta thấy, đường trung trực của các cạnh cắt nhau tại một điểm. Dùng quy tắc TĐN, xét hình gồm bốn đường thẳng (các cạnh của tứ giác toàn phần) và sáu điểm (đỉnh của tứ giác toàn phần), ta có kết quả: *trung điểm của các đường chéo của một tứ giác toàn phần cùng nằm trên một đường thẳng.*

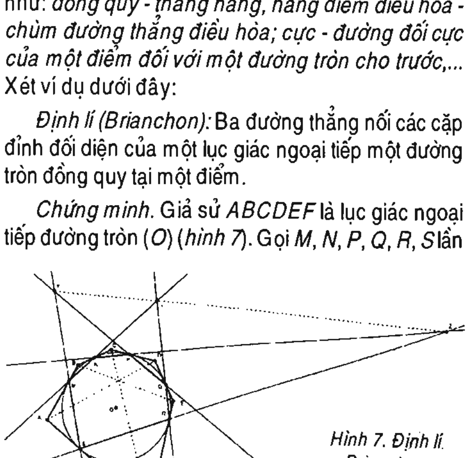


Hình 6. Tứ giác toàn phần và TĐN của nó

Như vậy, quy tắc TĐN "đồng quy" và "thẳng hàng" cung cấp cho HS một phương pháp linh hoạt hơn khi chứng minh đồng quy hoặc thẳng hàng. Sử dụng thao tác tư duy TĐN, ta có thể chuyển bài toán từ chứng minh đồng quy sang chứng minh thẳng hàng và ngược lại. Một số khái niệm TĐN có thể giúp HS giải quyết các bài toán thuộc dạng này như: *đồng quy - thẳng hàng, hàng điểm điều hòa - chùm đường thẳng điều hòa; cực - đường đối cực của một điểm đối với một đường tròn cho trước,...* Xét ví dụ dưới đây:

Định lí (Brianchon): Ba đường thẳng nối các cặp đỉnh đối diện của một lục giác ngoại tiếp một đường tròn đồng quy tại một điểm.

Chứng minh. Giả sử $ABCDEF$ là lục giác ngoại tiếp đường tròn (O) (*hình 7*). Gọi M, N, P, Q, R, S lần



Hình 7. Định lí Brianchon

lượt là tiếp điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA với đường tròn (O). Khi đó, theo định lí Pascal đối với lục giác $MNPQRS$ nội tiếp đường tròn: $MN \cap QR = X$, $PQ \cap SM = Y$, $NP \cap RS = Z$, ta có ba điểm X, Y, Z thẳng hàng.

Dễ thấy các điểm X, Y, Z lần lượt là cực của các đường thẳng BE, AD, CF đối với đường tròn (O). Vì X, Y, Z là ba điểm thẳng hàng nên các đường đối cực của nó là BE, AD, CF đồng quy tại một điểm. Điểm này chính là cực của đường thẳng Pascal đối với đường tròn (O).

Ở bài toán này, nếu chứng minh trực tiếp ba đường thẳng BE, AD, CF đồng quy sẽ rất phức tạp. Khi vận dụng thao tác tư duy TĐN để xem xét ở khía cạnh khác thì bài toán lại trở nên đơn giản hơn. Cụ thể, nhờ cặp khái niệm đối ngẫu: cực và đường đối cực, đồng quy và thẳng hàng, bài toán được chuyển về chứng minh ba điểm thẳng hàng dựa vào kết quả của định lí Pascal.

***

Quy tắc TĐN yêu cầu HS phải có khả năng tư duy ở mức độ cao. Vì vậy, đây là biện pháp bồi dưỡng năng lực tư duy toán học cho HS giỏi toán rất hữu hiệu, đặc biệt, giúp HS hệ thống hóa và mở rộng tri thức toán học một cách chủ động, tích cực. Điều này là cơ sở cho sự sáng tạo trong nghiên cứu và học tập toán. Do đó, GV cần vận dụng linh hoạt quy tắc TĐN vào dạy học để truyền cho HS niềm say mê học tập và ngày càng yêu thích môn học. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Michael de Villiers. *Some adventures in Euclidean geometry.* University of Durban-Westville, Durban, South Africa, 1996.
2. Michael de Villiers. *Generalizing van Aubel using duality.* Mathematics Magazine, Vol.73 (4), pp. 303-307. 2000a.
3. Michael de Villiers. *A dual, and generalisations, of a sharp result.* KwaZulu-Natal Mathematics Journal, Vol.5 (2), pp.16-18, 2000b.
4. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán.** NXB *Đại học sư phạm*, H. 2004.

SUMMARY

The concept of duality plays an important role in mathematics. However, this concept is not popularly used in the secondary school because duality principles are not true in Euclidean geometry. Therefore, this paper proposes the potential of applying the concept of quasi-duality in geometry at the secondary school level and presents its application in systematizing knowledge and discovering new results. These activities also make a contribution to develop student's thinking in solving mathematical problems.

Tổ chức dạy học theo dự án...

(Tiếp theo trang 46)

hướng dẫn; *- Đánh giá từng thành viên trong mỗi nhóm:* Dựa trên kết quả đánh giá sản phẩm của cả nhóm cùng với phiếu đánh giá của nhóm trưởng dành cho các thành viên, phiếu tự đánh giá bản thân, GV cho điểm và tính điểm vào phiếu đánh giá của mỗi HS.

Trong quá trình thuyết trình DA, GV có thể căn cứ vào tính tích cực phát biểu, khả năng tham gia đóng góp vào sự thành công của buổi thuyết trình mà cho các em thêm điểm thưởng.

3) Đánh giá kết quả của DA: Đánh giá thành công DA dựa trên các tiêu chí: năng lực làm việc, tinh thần, tác phong làm việc nhóm và chất lượng sản phẩm. Mặt khác, GV cần căn cứ vào chuẩn kiến thức, kĩ năng mà HS đạt được sau khi DA kết thúc.

***

Vận dụng DHTDA vào dạy học đã đạt được mục tiêu kép: giúp HS đạt chuẩn kiến thức, kĩ năng và thái độ theo yêu cầu của mục tiêu bài học, hiểu rõ các ứng dụng của toán học trong thực tiễn; ngoài ra, HS còn được rèn luyện và nâng cao năng lực giải quyết vấn đề, năng lực giao tiếp, năng lực làm việc nhóm... Do đó, DHTDA góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy môn *Toán* trong trường THPT và gắn nhà trường với thực tiễn.❑

Tài liệu tham khảo

1. Trần Việt Cường - Trần Trung. **Tiếp cận hiện đại trong rèn luyện năng lực sư phạm cho sinh viên ngành toán ở trường đại học.** NXB *Đại học sư phạm*, H. 2013.
2. Buck Institute for Education. *Introduction to Project - Based Learning.* Project based learning hand book, 2007.
3. John W. Thomas. *A review of research on Project - Based Learning.* California, 2000.

SUMMARY

Project based learning is a form of teaching aimed at learners, learner-centered. This article has proposed the ways of organizing students project based learning in Mathematics for high school students. The experimental pedagogical results were initially demonstrated that project based learning in Mathematics for high school students is appropriate and meet the requirements of innovative teaching methods in high schools nowadays.