ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN TỚI

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LAPLACE

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60. 46. 01. 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học
PGS. TS HÀ TIẾN NGOẠN

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan, Luận văn này là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của PGS. TS Hà Tiến Ngoạn.

Trong quá trình nghiên cứu đề tài Luận văn, tôi đã kế thừa thành quả khoa học của các nhà Toán học và các nhà Khoa học với sự trân trọng và biết ơn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2014

Tác giả

Trần Văn Tới

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Hà Tiến Ngoạn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc về sự tận tâm và nhiệt tình của Thầy trong suốt quá trình tôi thực hiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo Khoa học và Quan hệ quốc tế, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên và quý thầy cô tham gia giảng dạy lớp cao học khóa 6 (2012 - 2014) đã quan tâm, giúp đỡ và mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong suốt thời gian học tập tại trường.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ trong quá trình học tập của mình.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2014

Tác giả

Trần Văn Tới

Mở đầu

Phương trình Laplace là một phương trình cơ bản và cổ điển của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Đây là đại diện quan trọng của lớp phương trình elliptic. Việc tổng quan các tính chất cơ bản của nghiệm phương trình và bất phương trình Laplace là cần thiết. Đó là các hàm điều hòa, trên điều hòa và dưới điều hòa. Đối với các hàm này có rất nhiều tính chất, định lý đã được nghiên cứu. Chẳng hạn như nguyên lý cực đại, các định lý về giá trị trung bình, ...

Đối với hàm điều hòa, nghiệm suy rộng của bài toán biên Dirichlet luôn tồn tại. Nhưng ở luận văn này nghiên cứu nghiệm cổ điển của bài toán biên Dirichlet, cụ thể xét tính giải được của bài toán biên Dirichlet trong một miền bị chặn, nghiên cứu khi nào bài toán Dirichlet là giải được trong miền Ω. Chính vì vậy, trong luận văn này đã đưa vài khái niệm điểm chính quy trên biên mà được định nghĩa thông qua khái niệm hàm chắn.

Kết quả cơ bản trong luận văn này là định lý nói rằng bài toán Dirichlet giải được khi và chỉ khi mọi điểm trên biên đều là điểm chính quy. Phần cuối của luận văn nghiên cứu khi nào một điểm là chính quy.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1 trình bày các khái niệm, tính chất cơ bản về nghiệm của phương trình Laplace và các bất phương trình Laplace. Đó là các định nghĩa về hàm điều hòa, hàm dưới điều hòa, trên điều hòa, công thức tích phân từng phần, các đẳng thức và bất đẳng thức giá trị trung bình, nguyên lý cực đại và cực tiểu.

Chương 2 nghiên cứu các tính chất cơ bản của hàm điều hòa. Đó là bất đẳng thức Harnack, đưa vào công thức Green, hàm Green đối với bài toán Dirichlet, nghiên cứu định lý hội tụ và các đánh giá bên trong đối với hàm điều hòa. Phần cuối nghiên cứu bài toán Dirichlet cho hàm điều hòa bằng phương pháp hàm điều hòa dưới. Bằng phương pháp này đã đưa vào khái niệm điểm chính quy trên biên, phát biểu và chứng minh định lý về điều kiện cần và đủ cho tính giải được của bài toán biên Dirichlet. Đưa vào điều kiện đủ cho tính chính quy, đó là điều kiện hình cầu ngoài của miền. Điều kiện cần và đủ cho tính chính quy của một điểm trên biên được phát biểu thông qua khái niệm dung lượng.

Tài liệu tham khảo chính của luận văn là chương 2 của tài liệu [2].

Chương 1

Nghiệm của phương trình và bất phương trình Laplace

1.1 Các định nghĩa. Công thức tích phân từng phần

1.1.1 Hàm điều hòa, hàm dưới điều hòa và hàm trên điều hòa

Ký hiệu:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Định nghĩa 1.1.1.

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và hàm số u thuộc $C^2(\Omega)$. Toán tử Laplace tác động lên u, kí hiệu là Δu, được xác định bởi:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} {D_j}^2 u = \mathtt{div} Du, \tag{1.1}$$

trong đó,

$$Du = (D_1 u, D_2 u, ..., D_n u) \text{ là gradient của } u,$$
$$D_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = \texttt{div}(Du).$$

Hàm số u được gọi là *hàm điều hòa* (hàm *dưới điều hòa*, hàm *trên điều hòa*) trong Ω nếu nó thỏa mãn:

$$\Delta u(x) = 0 \ (\geq 0, \leq 0), \forall x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Trong chương này chúng ta phát triển một số tính chất của hàm điều hòa, hàm dưới điều hòa và hàm trên điều hòa dùng để nghiên cứu tính giải được của bài toán Dirichlet cổ điển cho phương trình Laplace, $\Delta u = 0$. Phương trình Laplace và phương trình không thuần nhất tương ứng của nó, phương trình Poisson $-\Delta u = f$, là mô hình cơ bản của phương trình tuyến tính eliptic.

1.1.2 Công thức tích phân từng phần

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên $\partial\Omega$, ký hiệu $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$ là véctơ pháp tuyến ngoài đơn vị tại điểm $x \in \partial\Omega$, dS là phần tử diện tích của $\partial\Omega$.

Với $u,v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, ta có công thức tích phân từng phần:

$$\int\limits_{\Omega} (D_j u) v dx = - \int\limits_{\Omega} u (D_j v) dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\mu_j dS. \tag{1.3}$$

Từ công thức trên ta suy ra Định lý phân kì sau đây. Cho trường véctơ bất kì $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ trong $C^1(\bar{\Omega})$. Khi đó ta có

$$\int\limits_{\Omega} \texttt{div} w dx = \int\limits_{\Omega} (w, \mu) dS, \tag{1.4}$$

trong đó, $\texttt{div} w = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial w_j}{\partial x_j}$.

Thật vậy, áp dụng công thức (1.3) ta có:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \mathtt{div} w dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} D_j w_j dx &= \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} (D_j w_j).1.dx \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} w_j.1.\mu_j dS \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} (w, \mu) dS.\end{aligned}$$

Đặc biệt nếu u là một hàm trong $C^2(\bar{\Omega})$ bằng cách đặt $w = Du$ trong (1.4) chúng ta có:

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\Omega} \mathtt{div}(Du) dx = \int\limits_{\partial\Omega} Du.\mu.dS = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mu} dS, \tag{1.5}$$

trong đó $\frac{\partial u}{\partial \mu} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mu_j$.

1.2 Đẳng thức và bất đẳng thức đối với giá trị trung bình

1.2.1 Các đại lượng trung bình

Ký hiệu ω_n là thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó:
Thể tích của hình cầu bán kính R là $\omega_n R^n$.
Diện tích của mặt cầu đơn vị là: $n\omega_n$.
Diện tích của mặt cầu bán kính R là $n\omega_n R^{n-1}$.
Đại lượng trung bình của hàm số u trên mặt cầu B bán kính R là:

$$\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B} u dS.$$

Đại lượng trung bình của hàm số u trong hình cầu B bán kính R là:

$$\frac{1}{\omega_n R^n} \int\limits_{B} u dx.$$