ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI VIỆT HÀ

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên, năm 2015

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

Lý do chọn đề tài

Môn hình học ra đời từ thời Euclid (Thế kỷ thứ III trước công nguyên) nhưng đến năm 1619, Rene Descartes - một nhà triết học kiêm vật lý và nhà toán học người Pháp (1596 - 1650) đã dùng đại số để đơn giản hóa hình học cổ điển và đã trình bày về phương pháp tọa độ trong quyển "La gesometrie" (1637). Sự ra đời của phương pháp tọa độ đã thiết lập được mối quan hệ mật thiết giữa hình học và đại số.

Trong chương trình toán THPT hình học là một môn học khó có tính hệ thống, chặt chẽ, logic và trìu tượng. Đặc biệt là phần hình học không gian, cùng với phương pháp tổng hợp việc đưa phương pháp tọa độ trong chương trình học cũng là cơ hội để học sinh làm quen với các ngôn ngữ của toán học cao cấp. Các bài toán liên quan đến phương pháp tọa độ cũng là những bài toán thường gặp trong các kỳ thi Đại học, học sinh giỏi toán.

Hiện nay nhiều học viên cao học chuyên ngành phương pháp toán sơ cấp của trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên cũng đã khai thác có hiệu quả các vấn đề liên quan đến phương pháp tọa độ nhưng chưa có học viên nào đi sâu tìm hiểu về phương pháp tọa độ trong hình học không gian và việc vận dụng phương pháp tọa độ vào giải quyết một số dạng bài toán hình học không gian trong chương trình toán THPT.

Với mong muốn tìm hiểu, học hỏi và tích lũy thêm kinh nghiệm để phục vụ ngay chính công tác giảng dạy ở THPT, chúng tôi chọn hướng nghiên cứu " Phương pháp tọa độ trong hình học không gian " để triển khai đề tài luận văn Thạc sĩ.

Luận văn có các nhiệm vụ chính:

(1). Sưu tầm một số dạng toán hình học trong không gian có thể giải bằng phương pháp tọa độ.

(2). Phân dạng, hệ thống hóa, đưa ra lời giải chi tiết cho mỗi bài toán.

(3). Đưa ra một số định hướng, gợi ý để giúp học sinh nhận dạng và thể hiện phương pháp tọa độ trong việc giải các bài toán tương tự.

(4). Mặt khác, ưu điểm của phương pháp tọa độ là chúng bao hàm một số thuật toán. Luận văn cũng đã cố gắng minh họa một vài thuật toán đó với phần mềm Maple để kiểm tra kết quả các lời giải toán.

Luân văn được hoàn thành với sự hướng dẫn chỉ bảo tận tình của PGS.TS Trịnh Thanh Hải – Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo của Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn quý thầy, cô trong khoa Toán – Tin, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K7 đã động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong nhận được sự chỉ bảo, đóng góp ý kiến của quý thầy, cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Học viên

Bùi Việt Hà

Chương I: KIẾN THỨC CƠ SỞ

Trong chương này chúng tôi xin trình bày sơ lược lại một số khái niệm, định nghĩa, tính chất…chủ yếu ở các tài liệu [2], [3], [4], [7], [10]. Đây là những kiến thức cơ sở, nền tảng cho các lời giải của các ví dụ được trình bày trong chương 2.

1.1. Sơ lược về không gian Ơclit

1.1.1. Định nghĩa

Không gian Ơclit là không gian liên kết với không gian vectơ Ơclit hữu hạn chiều. Không gian Ơclit sẽ gọi là n chiều nếu không gian vectơ Ơclit liên kết với nó có số chiều bằng n. Không gian Ơclit thường được ký hiệu là E, không gian Ơclit liên kết với nó được kí hiệu là $\vec{E}$.

1.1.2. Mục tiêu trực chuẩn

Mục tiêu afin $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ của không gian Ơclit n chiều E^n gọi là mục tiêu trực chuẩn (hay hệ tọa độ đề các vuông góc), nếu cơ sở $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$ của $\vec{E}^n$ là cơ sở trực chuẩn, tức $\vec{e}_i.\vec{e}_j=\delta_{ij}$, $\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ nếu } i\neq j\\ 1 \text{ nếu } i=j\end{cases}$

1.1.3. Đổi mục tiêu trực chuẩn

Cho hai mục tiêu trực chuẩn $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$(I) và $\{O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,..,\vec{e}'_n\}$(II) của không gian Ơclit n chiều E^n. Gọi C là ma trận chuyển từ cơ sở $\varepsilon=\{\vec{e}_1;\vec{e}_2...;\vec{e}_n\}$ sang cơ sở $\varepsilon'=\{\vec{e}'_1;\vec{e}'_2...;\vec{e}'_n\}$.

Các cơ sở đó đều là cơ sở trực chuẩn nên C là ma trận trực giao cấp n. Khi đó, công thức đổi mục tiêu trực chuẩn là X = C X’ + a.

Với $C.C^t = I_n$, a là ma trận cột tọa độ của gốc O’ đối với mục tiêu (I). X và X’ là hai ma trận cột tọa độ của cùng một điểm đối với mục tiêu thứ nhất và thứ hai.

1.1.4. Hệ tọa độ đề các vuông góc thuận, nghịch

Với E^3 mục tiêu trực chuẩn (I) và (II) ở trên. Ta quy định cơ sở

$\varepsilon = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2 ...; \vec{e}_n\}$ của mục tiêu trực chuẩn (I) là thuận. Khi đó nếu ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II) có định thức là dương thì hệ tọa độ Đề các vuông góc là thuận, ngược lại có hệ tọa độ là nghịch.

1.1.5. Hệ trục tọa độ trong không gian

Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ Đề các vuông góc trong không gian và kí hiệu Oxyz.

Ta gọi các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ thì hệ tọa độ Oxyz có thể viết là hệ tọa độ (O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) và cần chú ý:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

1.1.6. Tọa độ của vectơ đối với hệ tọa độ

Trong hệ tọa độ Đề các vuông góc (O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) cho vectơ tùy ý $\vec{v}$. Vì 3 vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ không đồng phẳng nên tồn tại duy nhất bộ số (x; y; z) sao cho $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì (x; y; z) được gọi là tọa độ của $\vec{v}$.

Kí hiệu: $\vec{v}$ = (x; y; z) hoặc $\vec{v}$(x; y; z).

1.1.7. Tọa độ của điểm đối với hệ tọa độ

Trong hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho điểm M bất kì. Khi đó: Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng là tọa độ của điểm M. Như vậy nếu vectơ $\overrightarrow{OM}$ = (x; y; z) tức là $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì bộ ba số (x; y; z) là tọa độ của điểm M.

Kí hiệu: M = (x; y; z) hoặc M(x; y; z).

1.1.8. Một số tính chất (xét trong trong E^3)

+) $\vec{b}$ cùng phương $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow$ $\exists\, k \in \mathbb{R}$, sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.

+) Tích có hướng của $\vec{a}$ = (x; y; z) và $\vec{b}$ = (x'; y'; z') là vectơ

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

+) Cho $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{v} = (x'; y'; z')$, $k \in \mathbb{R}$

$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y'; z \pm z')$.

$\vec{u} \,.\, \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

+) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right].\vec{c} = 0$

+) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$

+) $V_{\text{Tứ diện ABCD}} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

+) $V_{\text{Hình hộp ABCD.A'B'C'D'}} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

+) $V_{\text{Lăng trụ ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

+) Khoảng cách từ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α):

$Ax + By + Cz + D = 0$: $\quad d(M_0,(\alpha)) = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

+) Cho 2 đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau, Δ_1 qua M_1 có vtcp $\vec{u}_1$, Δ_2 qua M_2 có vtcp $\vec{u}_2$. Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 là:

$$d(\Delta; \Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{u}_1, \vec{u}_2\right]\right|}$$

Góc giữa hai đường thẳng: $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|} = \dfrac{\left|a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$,

trong đó: $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1)$; $\vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Gọi θ là góc giữa Δ và (α), ta có

$\sin\theta = \dfrac{|A.a + B.b + C.c|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. $0^0 \le \theta \le 90^0$; với $\vec{u}$(a; b; c) là vectơ chỉ phương của Δ; $\vec{n}$(A; B; C) là vectơ pháp tuyến của (α).

+) Góc (γ) giữa hai mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 và (α’): A’x + B’y + C’z + D’ = 0.

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

trong đó $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của (α) và (α’).

1.2. Một số mô hình xác định hệ trục tọa độ

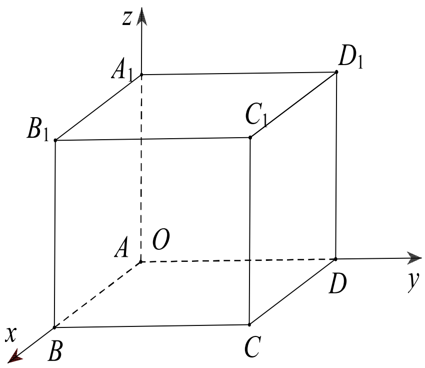
Để vận dụng phương pháp tọa độ vào giải quyết các bài toán hình học trong không gian trước tiên ta phải chọn hệ trục tọa độ. Ta có thể căn cứ vào một số mô hình sau đây.

❖ **Mô hình 1.** Hình lập phương

Xét hình lập phương ABCD.$A_1B_1C_1D_1$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $S \equiv O$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Khi đó

A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), C_1(1; 1; 1).

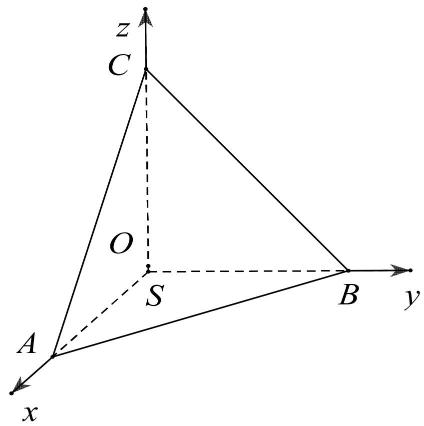


❖ **Mô hình 2.** Tam diện vuông

Xét tam diện vuông S.ABC có SA=a, SB=b, SC=c.

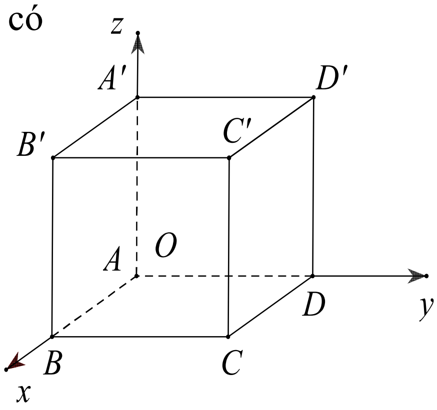
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $S \equiv O$, $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là

S(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B (0; b; 0), C(0; 0; c).



❖ **Mô hình 3.** Hình hộp chữ nhật

Xét hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D' có độ dài các cạnh là AB = a, AD = b, AA' = c.



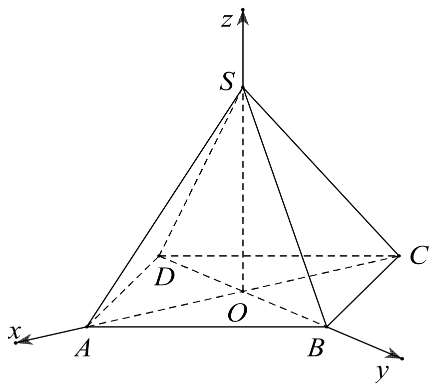
Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $A \equiv O$. B, D, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm là

A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; b; 0), D(0; b; 0),

A'(0; 0; c), B'(a; 0; c), C'(a; b; c), D'(0; b; c)

❖ **Mô hình 4.** Hình chóp tứ giác đều

Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có gốc O là giao của hai đường chéo và SO= h, AC = 2a, BD = 2a.

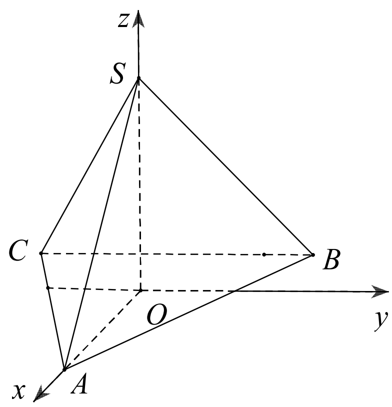


Chọn hệ trục tọa dộ Oxyz sao cho $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm là:

O(0; 0; 0), S(0; 0; h), A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(- a; 0; 0), D(0; - a; 0).

❖ **Mô hình 5**. Hình chóp tam giác đều

Xét hình chóp tam giác đều S.ABC có O là tâm của tam giác ABC và SO = h, BC = a.



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ các điểm khi đó là:

O(0; 0; 0), S(0; 0; h),

$$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right).$$

Nhận xét: Nếu là mô hình khác thì ta phải tìm ra được một góc tam diện vuông hợp lý, từ đó ta sẽ chọn được hệ trục Oxyz tương ứng để giải quyết bài toán.

Chương II: VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ VÀO GIẢI MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Để giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ thì ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz.

Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

Bước 4: Giải quyết bài toán.

Vì các dạng bài toán hình học không gian vô cùng phong phú, đa dạng, trong chương này chúng tôi chỉ trình bày một số dạng quen thuộc như: Bài toán định lượng, chứng minh, cực trị, bài toán về điểm và quỹ tích.

Các bài toán trình bày trong chương này được lựa chọn, trích dẫn từ các nguồn tài liệu [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6], [7], [8]…

2.1. Vận dụng phương pháp tọa độ vào các bài toán định lượng

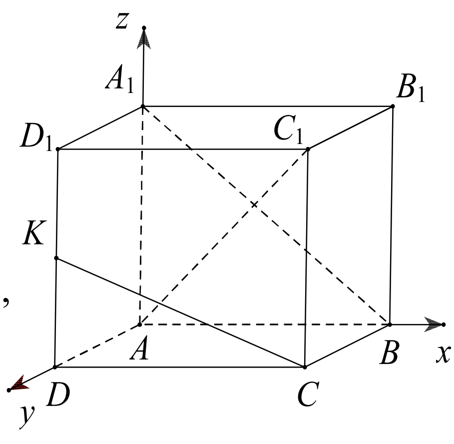
Bài toán 2.1. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và AC_1.

b) Gọi K là trung điểm DD_1. Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng CK và A_1D.

c) Mặt phẳng (P) qua BB_1 và hợp với 2 đường thẳng BC_1, B_1D hai góc bằng nhau. Tính các góc này.

Lời giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz, với $O \equiv A$, B thuộc tia Ax, D thuộc tia Ay và A_1 thuộc tia Az, khi đó: A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), D(0; a; 0); A_1(0; 0; a), B_1(a; 0; a), C_1(a; a; a), D_1(0; a; a).

a) Ta có $\overrightarrow{A_1B}$ (a; 0; - a); $\overrightarrow{AC_1}$ (a; a; a).