ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI XUÂN QUANG

ĐA TẠP QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ PHẦN TUYẾN TÍNH LÀ TOÁN TỬ QUẠT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI XUÂN QUANG

ĐA TẠP QUÁN TÍNH ĐỐI VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ PHẦN TUYẾN TÍNH LÀ TOÁN TỬ QUẠT

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. NGUYỄN THIỆU HUY

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả nghiên cứu viết trong luận văn là của tôi. Các kết quả trong luận văn là mới và chưa từng được ai công bố trong bất cứ một công trình nào khác mà tôi biết.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 4 năm 2015

Học viên

Bùi Xuân Quang

Tóm tắt nội dung

Trong luận văn này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình tiến hóa thông qua sự tồn tại của một đa tạp quán tính. Cụ thể, sử dụng phương pháp Lyapunov-Perron và các đánh giá nhị phân kết hợp với tính chấp nhận được của không gian hàm, chúng tôi chứng minh sự tồn tại của đa tạp quán tính đối với các phương trình tiến hóa nửa tuyến tính có dạng

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)),\ t > s, \quad u(s) = u_s,\ s \in \mathbb{R},$$

trong đó toán tử đạo hàm riêng tuyến tính $-A$ là toán tử quạt trong một không gian Banach có kẽ hở phổ đủ lớn sinh ra nửa nhóm giải tích và số hạng phi tuyến f thỏa mãn điều kiện φ-Lipschitz, tức là $\|f(t,u) - f(t,v)\| \leqslant \varphi(t)\|A^\theta(u-v)\|$, với φ thuộc vào một không gian hàm chấp nhận được.

Từ khóa. Phương pháp Lyapunov-Perron, đa tạp quán tính, phương trình parabolic nửa tuyến tính, không gian hàm chấp nhận được, toán tử quạt, nửa nhóm giải tích.

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nguyễn Thiệu Huy (Viện Toán ứng dụng và Tin học - Đại học Bách Khoa Hà Nội). Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt bài toán, truyền cảm hứng, tận tình chỉ bảo tác giả nghiên cứu và dẫn dắt tác giả đến một hướng nghiên cứu rất thời sự trong lĩnh vực Phương trình vi phân & Hệ động lực.

Nhân dịp này, tác giả xin gửi những lời cảm ơn đặc biệt đến Ban tổ chức và các thành viên của Seminar *"Asymptotic Behavior of Solutions to Differential Equations and Applications"* do PGS.TS. Nguyễn Thiệu Huy điều hành tại Đại học Bách Khoa Hà Nội vì đã tạo ra cho tác giả một môi trường học thuật nghiêm túc, sôi động và giải đáp nhiều thắc mắc về kiến thức chuyên môn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Trường Đại học Hải Phòng và các anh chị đồng nghiệp trong Khoa vì đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi để tác giả học tập và nghiên cứu. Tác giả trân trọng gửi lời cảm ơn đến các cán bộ giảng dạy của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Cuối cùng, tác giả xin dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến bố mẹ, gia đình đã luôn bên cạnh và động viên để tác giả hoàn thành luận văn này.

Danh sách kí hiệu

$C(\Omega)$	không gian các hàm số liên tục trên Ω
$C^k(\Omega)$	không gian các hàm số khả vi liên tục cấp k trên Ω
$X \hookrightarrow Y$	phép nhúng
$\operatorname{Re} z,\ \arg z$	phần thực và argument của số phức z
$u_t(t,x),\ u_{xx}(t,x)$	đạo hàm riêng của hàm số $u(t,x)$
$\frac{dx(t)}{dt},\ \dot{x}(t),\ \ddot{x}(t)$	đạo hàm các bậc của hàm số $x(t)$
$\mathscr{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
A^θ	lũy thừa bậc phân số toán tử A
$X_\theta := \mathscr{D}(A^\theta)$	miền xác định của lũy thừa bậc phân số A^θ
$\rho(A),\ \sigma(A)$	tập giải thức và phổ của toán tử A
$R(\lambda, A)$	giải thức của toán tử A
$L_{1,loc}(\mathbb{R})$	không gian các hàm số khả tích địa phương trên $\mathbb{R}$
$\{e^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$	nửa nhóm sinh bởi toán tử $-A$
ω_0	cận tăng trưởng của nửa nhóm $\{e^{-tA}\}_{t\geqslant 0}$
(σ, ω)	toán tử quạt kiểu (σ, ω)
$s(A)$	biên phổ của toán tử A
$\mathcal{G}(t, \tau)$	hàm Green
$PX,\ \ker P$	không gian ảnh và hạch của X qua phép chiếu P
$u^\star(\cdot)$	quỹ đạo cảm sinh
$\operatorname{dist}_{X^\theta}$	nửa khoảng cách Hausdorff sinh bởi chuẩn của X^θ
B_ρ	hình cầu bán kính ρ trong một không gian Banach
$\mathscr{L}(X)$	không gian các toán tử tuyến tính bị chặn trên X

Mở đầu

Xét bài toán truyền nhiệt nửa tuyến tính trên thanh kim loại có độ dài hữu hạn

$$\begin{cases} u_t(t,x) &= u_{xx}(t,x) + f(u(t,x)), \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad\qquad\quad t \geqslant 0, \\ u(0,x) &= u_0(x), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Để có thể sử dụng những lý thuyết của Toán học hiện đại, ta sẽ chuyển bài toán trên thành phương trình toán tử trong một không gian trừu tượng. Để làm điều đó ta giới thiệu không gian Hilbert $X = L_2[0,\pi]$ và đặt

$$u(t,\cdot) = U(t), \quad f(u(t,\cdot)) = F(U(t)), \qquad t \geqslant 0.$$

Khi đó bài toán (1) được viết lại thành phương trình tiến hóa

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} &= BU(t) + F(U(t)), \quad t > 0, \\ U(0) &= u_0 \end{cases} \tag{2}$$

với B là toán tử đạo hàm riêng trong X xác định bởi

$$\mathscr{D}(B) := \big\{\varphi \in X : \varphi \text{ và } \dot\varphi \text{ là liên tục tuyệt đối}, \dot\varphi \in X,\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\big\},$$

$$B\varphi := \ddot\varphi.$$

Trong không gian Hilbert X với tích vô hướng

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_0^\pi \varphi(x)\psi(x)dx \quad \text{ với mọi } \varphi,\, \psi \in X,$$

toán tử tuyến tính không giới nội $A := -B$ như vậy là xác định dương, tự liên hợp, có phổ rời rạc. Một cách tổng quát, bài toán Cauchy trừu tượng

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) &= f(t,u(t)), \quad t > s, \\ u(s) &= u_s, \quad s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

với A là toán tử không giới nội trong một không gian Hilbert tách được vô hạn chiều, xác định dương, tự liên hợp, có giải thức compact và f là một toán tử phi tuyến, là mô hình của nhiều bài toán thực tế. Chẳng hạn nó là mô hình của quá trình truyền nhiệt (như phân tích ở trên), quá trình phản ứng-khuếch tán (xem [12]), hay mô hình Fisher-Kolmogorov mô tả sự lan truyền lớp gene trội trong quần thể sinh thái (xem [27, 28]),...

Việc xét các phương trình dưới dạng trừu tượng trong các không gian hàm tổng quát cho phép sử dụng những công cụ hiện đại để tìm hiểu những vấn đề mang tính bản chất của nghiệm. Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình này khi thời gian đủ lớn là một việc làm rất quan trọng. Nó cho phép hiểu sâu sắc hơn của các quá trình biến đổi vật chất theo thời gian, từ đó có thể đưa ra những ước lượng và đánh giá quy mô của các hệ thống trong tương lai. Một nhánh nghiên cứu đang rất sôi động và thời sự là nghiên cứu dáng điệu nghiệm thông qua sự tồn tại của một đa tạp khả vi, lý do là vì nó cho ta biết một bức tranh hình học tổng thể về dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hóa với nhiễu phi tuyến. Tìm điều kiện để phương trình này có đa tạp tích phân (chẳng hạn, đa tạp ổn định, không ổn định hay đa tạp trung tâm) là một trong các vấn đề trọng tâm của hướng nghiên cứu này (lịch sử vấn đề và các bước phát triển có thể tìm hiểu ở các công trình [10, 11, 15, 16, 17, 18, 19] trong đó Nguyễn Thiệu Huy và các cộng sự của mình đã đạt được những kết quả hiện đại đối với nhiều lớp phương trình nửa tuyến tính tổng quát trong không gian hàm chấp nhận được với các điều kiện rất tổng quát).

Trong lớp các đa tạp không ổn định, *đa tạp quán tính* là một công cụ lý tưởng để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hóa. Khái niệm đa tạp quán tính được giới thiệu năm 1985 bởi Foias C., Sell G. R., Temam R. [7] trong một cố gắng để giảm bớt các nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình Navier-Stokes đến một đa tạp Lipschitz hữu hạn chiều. Kể từ đó, đa tạp quán tính đối với phương trình tiến hóa đã được nghiên cứu một cách hệ thống trong nhiều công trình (xem [4, 5, 24, 31, 32] và các tài liệu tham khảo trong đó). Đặc tính quan