ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN QUANG VỤ

VẤN ĐỀ BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN QUANG VỤ

VẤN ĐỀ BIỂU DIỄN SỐ TỰ NHIÊN DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN-2015

Mục lục

Mở đầu

Bài toán biểu diễn một số nguyên n dưới dạng tổng của k số nguyên bình phương là một trong những vấn đề rất lý thú trong lý thuyết số. Các nhà số học như Fermat, Lagrange, ... đều quan tâm tới việc giải quyết của bài toán này và đều gặp khó khăn, rồi lại âm thầm với các khó khăn đó của mình.
Năm 1632, Albert Girard là người đầu tiên đưa ra nhận xét rằng: *Mỗi số nguyên tố lẻ bất kì mà đồng dư với 1 theo modul 4 đều được biểu diễn dưới dạng tổng của hai số chính phương*. Fermat là người đưa ra chứng minh đầu tiên. Bài toán này Fermat đã thông báo điều này trong một lá thư gửi cho Marin Mersenne vào ngày 25 tháng 4 năm 1640.
Lagrange đã giải quyết được bài toán mỗi số nguyên không âm bất kỳ luôn biểu diễn thành tổng các bình phương của 4 số nguyên. Nghĩa là $\forall n \geq 0$, tồn tại các số nguyên x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho:

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Tổng quát hơn, bài toán sau đây do Waring đề xuất đã được coi là một trong những bài toán nổi tiếng nhất của lý thuyết số. Bài toán có nội dung như sau: Với mỗi số nguyên $k \geq 2$, tồn tại số nguyên dương h thỏa mãn mỗi số nguyên không âm bất kỳ đều có thể biểu diễn thành tổng của đúng h hạng tử là lũy thừa bậc k của các số nguyên. Số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được kí hiệu là $g(k)$.

Năm 1909, nhà Toán học Đức đã chứng minh bài toán Waring đối với mọi lũy thừa bậc k. Đặc biệt năm 1943, nhà Toán học Nga là Yu.V.Linnick đã để lại chúc thư, trong đó có đưa ra cách chứng minh bài toán Waring mà chỉ cần sử dụng đến kiến thức cơ bản của lý thuyết số.

Trong khuôn khổ của luận văn này chỉ xét trường hợp khi $k = 2$. Nghĩa là chỉ xét bài toán biểu diễn số tự nhiên n cho trước dưới dạng tổng các bình phương của các số nguyên không âm.

Mục tiêu của luận văn là trình bày những kết quả nghiên cứu của việc biểu diễn một số tự nhiên n thành tổng của một số chẵn bình phương của các số nguyên và một số ví dụ ứng dụng trong toán sơ cấp.
Luận văn gồm 2 chương:
Chương 1: Bài toán biểu diễn số nguyên thành tổng các bình phương.
Chương 2: Biểu diễn số tự nhiên thành tổng của một số chẵn các bình phương.
Để hoàn thành luận văn, tác giả xin bầy tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nông Quốc Chinh, người Thầy hướng dẫn đã động viên và giúp đỡ tôi trong quá tình viết và hoàn thành luận văn. Tôi cũng xin bầy tỏ lòng biết ơn của mình tới các Thầy Cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình học để tôi hoàn thành khóa học.

***Thái Nguyên*, ngày 01 tháng 6 năm 2015**
Đoàn Quang Vụ

Chương 1

Bài toán biểu diễn số nguyên thành tổng các bình phương

1.1 Vấn đề biểu diễn một số nguyên thành tổng các lũy thừa

Bài toán biểu diễn một số nguyên thành tổng của k hạng tử là các lũy thừa bậc m của k số nguyên nào đó là một trong những vấn đề được nhắc đến nhiều nhất của lý thuyết số.

Lagrang đã giải quyết được bài toán mỗi số nguyên không âm bất kỳ luôn biểu diễn thành tổng các bình phương của 4 số nguyên. Nghĩa là $\forall n \geq 0$, tồn tại các số nguyên x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho:

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Tương tự, Wieferich đã chứng minh được rằng mỗi số nguyên đều biểu diễn được thành tổng các lập phương của 9 số nguyên. Nghĩa là với mỗi số nguyên không âm luôn tồn tại các số nguyên $x_1, x_2, ..., x_9$ sao cho:

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + x_7^3 + x_8^3 + x_9^3$$

Tổng quát hơn, bài toán sau đây do Waring đề xuất đã được coi là một trong những bài toán nổi tiếng nhất của lý thuyết số. Bài toán có nội dung như sau: Với mỗi số nguyên $k \geq 2$, tồn tại số nguyên dương h thỏa mãn mỗi số nguyên không âm bất kỳ đều có thể biểu diễn thành tổng của đúng h hạng tử là lũy thừa bậc k của các số nguyên. Số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện trên được kí hiệu là $g(k)$.

Nhận xét, do 7 không thể viết thành tổng các bình phương của 3 số nguyên, và theo định lý Lagrang ta có: $g(2) = 4$. Tương tự, do số 23 không thể biểu diễn thành tổng các lập phương của 8 số nguyên, nên theo định lý Wieferich ta có $g(3) = 9$.

Năm 1909, nhà Toán học Đức đã chứng minh bài toán Waring đối với mọi lũy thừa bậc k. Đặc biệt năm 1943, nhà Toán học Nga là Yu.V.Linnick đã để lại chúc thư, trong đó có đưa ra cách chứng minh bài toán Waring mà chỉ cần sử dụng đến kiến thức cơ bản của lý thuyết số.
Trong khuôn khổ của luận văn này chỉ xét trường hợp khi $k = 2$. Nghĩa là chỉ xét bài toán biểu diễn số tự nhiên n cho trước dưới dạng tổng các bình phương của các số nguyên không âm.

Với mỗi số nguyên dương s, và số nguyên không âm n, ta kí hiệu $R_s(n)$ là các bộ sắp thứ tự s số nguyên $x_1, x_2, ..., x_s$ thỏa mãn :

$$n = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_s^2$$

Các số nguyên x_i có thể dương, âm hoặc bằng 0.

Với mọi $s \geq 1$, dễ nhận thấy

$$R_s(0) = 1$$

Vì chỉ có duy nhất một dạng biểu diễn $0 = 0^2 + ... + 0^2$.

Biểu diễn số nguyên n dưới dạng tổng của s số nguyên bình phương là bài toán quan trọng trong lý thuyết số, nhưng lời giải của nó khi s chẵn luôn liên quan tới tổng của các ước của n.

Kí hiệu, d và δ là các số nguyên dương và $\sum_{d/n}$ và $\sum_{n=d\delta}$ biểu thị tổng được tính trên các ước dương của n.
Ta viết số nguyên dương n dưới dạng $n = 2^a m$, với $a \geq$ và m là số lẻ.

Ta sẽ chứng minh các công thức sau:

$$\mathrm{R}_2(n) = \begin{cases} 8\sum_{d\backslash n} d \text{ nếu n lẻ} \\ 24\sum_{d\backslash n} d \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$$

$$\mathrm{R}_6(n) = 4(4^{a+1} - (-1)^{(m-1)/2}) \sum_{m=d\delta} (-1)^{(\delta-1)/2} d^2$$

$$R_8(n) = \begin{cases} 16\sum_{d\backslash n} d^3 \text{ nếu n lẻ} \\ (16/7)(8^{a+1} - 15)\sum_{d\backslash n} d^3 \text{ nếu n chẵn} \end{cases}$$

$$\mathrm{R}_{10}(n) = \frac{4}{5}\left(16^{a+1} + (-1)^{(m-1)/2}\right) \sum_{m=d\delta} (-1)^{(\delta-1)/2} d^4$$

$$+ \ \frac{16}{5} \sum_{n=v^2+\mathrm{w}^2} (v^4 - 3v^2\mathrm{w}^2)$$

1.2 Một số kết quả của bài toán

Định lý 1.1. *Với mọi số nguyên dương s và n ta có:*

$$\sum_{|u|\le\sqrt{n}} \left(n - (s+1)u^2\right) R_s(n-u^2) = 0 \tag{1.1}$$

Chứng minh. Nếu

$$n = x_1^2 + ... + x_s^2 + x_{s+1}^2$$

thì $x_{s+1}^2 \le n$ và do đó

$$|x_{s+1}| \le \sqrt{n}$$

Với $j = 1, ..., R_{s+1}(n)$, có

$$n = \sum_{i=1}^{s+1} x_{i,j}^2$$

Biểu thị $R_{s+1}(n)$ là tổng của $s+1$ số bình phương. Với $i = 1, ..., s$, ta xác định ánh xạ T_i trên tập các bộ sắp thứ tự gồm $(s+1)$ thành phần như sau:

$T_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_s, x_{s+1}) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{s+1}, x_{i+1}, ..., x_s, x_i,)$
và có

$$\sum_{j=1}^{R_{s+1}(n)} x_{s+1,j}^2 = \sum_{j=1}^{R_{s+1}(n)} x_{i,j}^2$$

Tổng trên được tính trên tất cả các biểu diễn của n, từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} nR_{s+1}(n) &= \sum_{j=1}^{R_{s+1}(n)} \sum_{i=1}^{s+1} x_{i,j}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s+1} \sum_{j=1}^{R_{s+1}(n)} x_{i,j}^2 \\ &= (s+1) \sum_{j=1}^{R_{s+1}(n)} x_{s+1,j}^2 \\ &= (s+1) \sum_{|u| \le \sqrt{n}} u^2 R_s(n-u^2) \end{aligned}$$

Với mỗi số nguyên n thỏa mãn $|u| \le \sqrt{n}$ có $R_s(n-u^2)$ cách biểu diễn

$n = \sum_{i=1}^{s+1} x_{i,j}^2$ với $x_{s+1,j} = u$. Điều đó cũng suy ra rằng:

$$R_{s+1}(n) = \sum_{|u| \le \sqrt{n}} R_s(n-u^2)$$

nên

$$nR_{s+1}(n) = n \sum_{|u| \le \sqrt{n}} R_s(n-u^2)$$

và

$$\sum_{|u| \le \sqrt{n}} (n-(s+1)u^2) R_s(n-u^2)$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.2. *Giả sử Φ là một hàm số xác dịnh đối với tất cả các số nguyên không âm n sao cho*

$$\Phi(0) = 1$$

và

$$\sum_{|u|\leq\sqrt{n}} (n-(s+1)u^2)\Phi(n-u^2) = 0$$

Với $n \geq 1$. Thế thì

$$\Phi(n) = R_s(n)$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Từ định lý 1.1 ta suy ra với mỗi số nguyên dương s và n, ta có:

$$\begin{aligned} nR_s(n) &= \sum_{1\leq|u|\leq\sqrt{n}} (n-(s+1)u^2)R_s(n-u^2) \\ &= \sum_{1\leq|u|\leq\sqrt{n}} ((s+1)u^2-n)R_s(n-u^2) \end{aligned}$$

và

$$R_s(n) = 2\sum_{1\leq|u|\leq\sqrt{n}} \left(\frac{(s+1)u^2}{n} - 1\right) R_s(n-u^2) \tag{1.2}$$

Ví dụ 1.1 *Tính $R_2(n)$ với $n \leq 8$*
Với $s = 2$ ta có

$$R_2(1) = 2\left(\frac{3.1^2}{1} - 1\right) R_3(1-1^2) \qquad = 4$$

$$R_2(2) = 2\left(\frac{3.1^2}{2} - 1\right) R_3(2-1^2) \qquad = 4$$