ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯƠNG QUỐC ĐĂNG

ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY GUIGNARD VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU KHÔNG TRƠN

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

MÃ SỐ: 60460112

2015

Mục lục

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của tối ưu hóa. Các điều kiện Kuhn - Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu mà tất cả các nhân tử Lagrange ứng với các thành phần của hàm mục tiêu là dương và được gọi là các điều kiện Kuhn - Tucker mạnh. Với điều kiện chính quy kiểu Guignard cho bài toán tối ưu đa mục tiêu khả vi có ràng buộc bất đẳng thức. V. Preda và I. Chitescu ([10], 1999) đã phát triển các điều kiện tối ưu kiểu Maeda [8] cho bài toán tối ưu đa mục tiêu bán khả vi. Với điều kiện chính quy Guignard, X. J. Long và N. J. Huang ([7], 2014) đã thiết lập các điều kiện Kuhn - Tucker mạnh cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm Lipschitz địa phương dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng. Đây là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy em chọn đề tài : "Điều kiện chính quy Guignard và điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn".

2. Mục đích của đề tài

Luận văn trình bày các kết quả nghiên cứu về điều kiện chính quy Guignard và điều kiện tối ưu Kuhn - Tucker mạnh của V. Preda và I. Chitescu (1999) và điều kiện Kuhn - Tucker của X. J. Long - N. J. Huang (2014) cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn có ràng buộc bất đẳng thức.

3. Nội dung đề tài

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các kết quả của V. Preda và I. Chitescu về điều kiện chính quy Guignard và điều kiện Kuhn-Tucker mạnh cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu bán khả vi.

Chương 2: Trình bày các kết quả nghiên cứu của X. J. Long, N. J. Huang về điều kiện cần tối ưu và điều kiện đủ tối ưu dưới ngôn ngữ dưới vi phân suy rộng với điều kiện chính quy Guignard.

Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học. Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên lớp Cao học Toán K7A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 04 năm 2015

Tác giả

Lương Quốc Đăng

Chương 1

Điều kiện chính quy Guignard và điều kiện Kuhn-Tucker cho bài toán bán khả vi

Chương 1 trình bày các kết quả nghiên cứu của V. Preda và I. Chitescu ([10], 1999) về điều kiện chính quy Guignard cho bài toán tối ưu đa mục tiêu có ràng buộc bất đẳng thức và điều kiện cần Kuhn-Tucker mạnh cho nghiệm hữu hiệu của bài toán đó với các hàm bán khả vi.

1.1 Các định nghĩa và khái niệm

Cho hai vectơ x và y trong $\mathbb{R}^n$, ta sử dụng các quy ước sau:

$x \leqq y$ nếu và chỉ nếu $x_i \leqq y_i$, $\forall i, \quad i = 1, 2, ..., n$;

$x \leq y$ nếu và chỉ nếu $x \leqq y$ nhưng $x \neq y$;

$x < y$ nếu và chỉ nếu $x_i < y_i$, $\forall i, \quad i = 1, 2, ..., n$.

Chúng ta xét bài toán quy hoạch toán học đa mục tiêu sau đây:

$$\text{(VP)} \qquad \min f(x),$$
$$g(x) \leq 0,$$

trong đó $x \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, f = (f_1,\ f_2, ..., f_p),\ \ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g = (g_1,\ g_2, ..., g_m)$. Kí hiệu

$$X = \{\ x \in \mathbb{R}^n |\ g(x) \leqq 0\}$$

là tập chấp nhận được của bài toán (VP).

Định nghĩa 1.1.1.

Điểm $x^0 \in X$ *được gọi là nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP) nếu không tồn tại* $x \in X$ *sao cho* $f(x) \leq f(x^0)$.

Định nghĩa 1.1.2.

Điểm $x^0 \in X$ *được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (VP) nếu không tồn tại* $x \in X$ *sao cho* $f(x) < f(x^0)$.

Định nghĩa 1.1.3.

Giả sử Q *là một tập con khác rỗng của* $\mathbb{R}^n$. *Nón tiếp tuyến của* Q *tại* $x^0 \in clQ$ *là tập hợp xác định bởi*

$$T(Q;x^0) = \{h \in \mathbb{R}^n \,|\exists\, (x^k)_k \subset Q, \text{ với } x^0 = \lim_{k\to\infty} x^k, \\ \exists (t_k)^k, t_k > 0, \text{ sao cho } h = \lim_{k\to\infty} t_k(x^k - x^0)\},$$

trong đó clQ *là bao đóng của* Q.

Định nghĩa 1.1.4.

Giả sử $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *là hàm giá trị thực trên* $\mathbb{R}^n$.*Ta nói rằng* φ *là bán khả vi tại* x^0 *nếu* $\varphi^+(x^0, x - x^0)$ *tồn tại với mọi* $x \in \mathbb{R}^n$, *trong đó*

$$\varphi^+(x^0, x - x^0) = \lim_{\lambda\to 0^+} \lambda^{-1}[\varphi(\lambda x + (1-\lambda)x^0) - \varphi(x^0)].$$

Nếu φ là khả vi Gâteaux theo mọi hướng, tức là với mọi $u \in \mathbb{R}^n$, tồn tại

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}[\varphi(x^0 + \lambda u) - \varphi(x^0)] = \varphi^+(x^0, u)$$

và $\varphi^+(x^0, \cdot)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục thì φ là bán khả vi tại x^0.

Định nghĩa 1.1.5.

Giả sử $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *là tập khác rỗng. Ánh xạ* $\varphi : S \to \mathbb{R}$ *là tiền lồi bất biến trên* S *nếu tồn tại hàm vectơ n-chiều* $\eta(x, u)$ *trên* SxS *sao cho với mọi* $x, u \in S$ *và mọi* $\lambda \in [0, 1]$, *ta có*

$$\varphi(u + \lambda\eta(x, u)) \leqq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(u).$$

Trong trường hợp này ta nói rằng φ là tiền lồi bất biến theo η. Một hàm vectơ k-chiều $\psi : S \to \mathbb{R}^k$ là tiền lồi bất biến theo η nếu mỗi thành phần của nó là tiền lồi bất biến trên S theo η.

Bổ đề 1.1.1. [11]

Giả sử S là một tập khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $\psi : S \to \mathbb{R}^k$ là hàm tiền lồi bất biến trên S theo η. Khi đó,

hoặc $\psi(x) < 0$ có một nghiệm $x \in S$,

hoặc là $\lambda^T\psi(x) \geqq 0$, $\forall x \in S$, với $\lambda \in \mathbb{R}^k$ nào đó, $\lambda \geq 0$,

nhưng không thể đồng thời cả hai. Ở đây ^{T} là ma trận chuyển vị.

Giả sử rằng các hàm f_i, $i \in P = \{1, 2, ..., p\}$ và g_j, $j \in M = \{1, 2, ..., m\}$ là bán khả vi tại các điểm mà ta đang xét. Nếu $p > 1$ và $i \in P$, ta kí hiệu $P^i = P \backslash \{i\}$.

Định nghĩa 1.1.6.

Ta nói rằng $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bán khả vi tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ là gần tuyến tính tại x^0, nếu với mọi $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) = \varphi(x^0) + \varphi^+(x^0, x - x^0).$$

Định nghĩa 1.1.7.

Ta nói rằng $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bán khả vi tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ là tựa lồi tại x^0, nếu suy luận sau đây đúng với $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi(x) \leqq \varphi(x^0) \Rightarrow \varphi^+(x^0, x - x^0) \leqq 0.$$

Hàm φ được gọi là tựa lõm tại x^0 nếu -φ là tựa lồi tại x^0. Hàm φ được gọi là giả lồi tại x^0 nếu với $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x) < \varphi(x^0) \Rightarrow \varphi^+(x^0, x - x^0) < 0.$$

Hàm φ được gọi là giả lõm tại x^0 nếu -φ là giả lồi tại x^0.

Rõ ràng là tính gần tuyến tính kéo theo tính tựa lồi (giả lồi) hoặc tính tựa lõm (giả lõm).

1.2 Điều kiện chính quy Guignard

Xét điều kiện chính quy để ta có thể nhận được điều kiện cần Kuhn-Tucker.

Nếu x^0 là nghiệm chấp nhận được của bài toàn (VP), ta gọi $B(x^0)$ là tập các ràng buộc tích cực tại x^0, tức là

$$B(x^0) = \{ \text{j} \in \text{M} |\, g_j(x^0) = 0\}.$$

Với mỗi $i \in P$, các tập khác rỗng $Q^i(x^0)$ và $Q(x^0)$ được xác định như sau:

$$\begin{aligned} Q(x^0) &= \{ x \in X |\, f(x) \leqq f(x^0)\}, \\ Q^i(x^0) &= \{ x \in X |\, f_k(x) \leq f_k(x^0),\ k \in P^i\}, \text{ nếu } p > 1, \\ Q^i(x^0) &= Q(x^0) \text{ nếu } p = 1. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.2.1.

Nón tuyến tính hóa $Q(x^0)$ tại x^0 được định nghĩa bởi

$$C(Q(x^0); x^0) = \{ h \in \mathbb{R}^n |\, f_i^+(x^0, h) \leqq 0, i \in P \text{ và } \\ g_i^+(x^0, h) \leqq 0, j \in B(x^0)\}.$$

Mệnh đề 1.2.1.

Nếu $f_i^+(x^0, \cdot)$, $i \in P$ và $g_j^+(x^0, \cdot)$, $j \in B(x^0)$ là các hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$ thì $C(Q(x^0); x^0)$ là nón lồi đóng.

Chứng minh.

Cho $\alpha \geqq 0$ và $h \in C(Q(x^0); x^0)$. Khi đó, $\alpha h \in C(Q(x^0); x^0)$, bởi vì

$$f_i^+(x^0, \alpha h) = \alpha f_i^+(x^0, h) \leqq 0,\ i \in P,$$

và tương tự,

$$g_i^+(x^0, \alpha h) \leqq 0,\ j \in B(x^0).$$

Bây giờ, giả sử h^1, $h^2 \in C(Q(x^0); x^0)$, và $\lambda \in [0, 1]$. Bởi vì các hàm $f_i^+(x^0, \cdot)$, $g_i^+(x^0, \cdot)$ lồi, ta có với $i \in P$,

$$f_i^+(x^0, \lambda h^1 + (1 - \lambda) h^2) \leqq \lambda f_i^+(x^0, h^1) + (1 - \lambda) f_i^+(x^0, h^2) \leqq 0,$$

và tương tự, với $i \in B(x^0)$,

$$g_j^+(x^0,\, \lambda h^1 + (1-\lambda)h^2) \leqq 0.$$

Cuối cùng, $C(Q(x^0); x^0)$ là đóng, do sự kiện là nếu ta lấy một dãy $(h^k)_k \subset C(Q(x^0); x^0)$ sao cho $h^k \to h^0$, ta suy ra

$$f_i^+(x^0,\, h^k) \leqq 0,\ \forall k,$$

và do đó,

$$\lim_k f_i^+(x^0,\, h^k) = f_i^+(x^0,\, h^0) \leqq 0,\ i \in P.$$

Tương tự, ta nhận được

$$g_j^+(x^0,\, h^0) \leqq 0, \quad j \in B(x^0).$$

Ta đã sử dụng tính liên tục của các hàm lồi $f_i^+(x^0, \cdot)$, $g_i^+(x^0, \cdot)$ trong $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Kết quả sau đây chỉ ra mối quan hệ giữa nón tiếp tuyến $T(Q^i(x^0);\, x^0)$ và nón tuyến tính hóa $C(Q(x^0);\, x^0)$.

Bổ đề 1.2.1.

Giả sử rằng x^0 là nghiệm chấp nhận được của bài toán (VP) và:

(A1) $f_i^+(x^0, \cdot)$, $i \in P$, *và* $g_j^+(x^0, \cdot)$, $j \in B(x^0)$ *là các hàm lồi trên* $\mathbb{R}^n$;

(A2) f_i, $i \in P$, *và* g_j, $j \in B(x^0)$ *là các hàm tựa lồi tại* x^0.

Khi đó,

$$\bigcap_{i \in P} \mathrm{clco} T(Q^i(x^0);\, x^0) \subseteq C(Q(x^0);\, x^0). \tag{1.1}$$

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh cho $p > 1$, chứng minh cho $p = 1$ tương tự. Với $i \in P$, ta đặt

$$C(Q^i(x^0);\, x^0) = \{\, h \in \mathbb{R}^n |\ f_k^+(x^0,\, h) \leqq 0,\ k \in P^i \text{ và } g_j^+(x^0,\, h) \leqq 0,\ j \in B(x^0)\}.$$

Chứng minh tương tự Mệnh đề 1.2.1, ta có $C(Q^i(x^0);\, x^0)$ lồi đóng với mọi $i \in P$. Rõ ràng là

$$\bigcap_{i \in P} C(Q^i(x^0);\, x^0) = C(Q(x^0);\, x^0). \tag{1.2}$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $i \in P$,

$$T(Q^i(x^0);\, x^0) \subseteq C(Q^i(x^0);\, x^0). \tag{1.3}$$

Giả sử $i \in P$ và $d \in T(Q^i(x^0);\, x^0)$. Ta có dãy $(x^k)_k \subseteq Q^i(x^0)$ và dãy $(t^k)_k$ trong $\mathbb{R}$ với $t_k > 0$ sao cho

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^0, \quad \lim_{k \to \infty} t_k(x^k - x^0) = d.$$

Với $k \geq 1$, ta đặt

$$d^k = t_k(x^k - x^0).$$

Khi đó, với mọi $j \in B(x^0)$ và với mọi k,

$$g_j(x^k) = g_j(x^0 + (1/t_k)d^k) \leqq 0 = g_j(x^0), \tag{1.4}$$

$$f(x^0 + (1/t_k)d^k) \leqq f(x^0). \tag{1.5}$$

Sử dụng (1.4) và (1.5) và tính tựa lồi của các hàm f_i, $i \in P$ và g_j, $j \in B(x^0)$, theo giả thiết (A2), với mọi k ta có

$$g_j^+(x^0 + (1/t_k)d^k) \leqq 0, \quad j \in B(x^0), \tag{1.6}$$

$$f_s^+(x^0 + (1/t_k)d^k) \leqq 0, \quad s \in P^i. \tag{1.7}$$

Sử dụng (1.6) và (1.7) và tính chất thuần nhất của f_s^+ và g_j^+, với mọi k, ta có

$$g_j^+(x^0,\, d^k) \leqq 0, \quad j \in B(x^0), \tag{1.8}$$

$$f_s^+(x^0, d^k) \leqq 0, \quad s \in P^i. \tag{1.9}$$

Do tính liên tục của các hàm lồi $g_j^+(x^0,\, \cdot)$, $f_s^+(x^0,\, \cdot)$ và do

$$\lim_{k \to \infty} d^k = d,$$

ta nhận được

$$g_j^+(x^0,\, d) \leqq 0, \quad j \in B(x^0), \tag{1.10}$$