ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN ĐÌNH DÙNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN ĐÌNH DÙNG

MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ DÃY SỐ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

Mở đầu

Trong chương trình Toán phổ thông nói chung, trong các dạng bài tập, đề thi tuyển sinh học sinh giỏi nói riêng thì các bài tập liên quan đến dãy số rất phong phú, đa dạng. Hiện nay nhiều học viên cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cũng đã khai thác có hiệu quả các vấn đề liên quan đến dãy số, tuy nhiên chưa có học viên nào đi sâu tìm hiểu về các dạng bài tập chọn học sinh khá, giỏi liên quan đến dãy số trong chương trình Toán phổ thông. Với mong muốn tìm hiểu, học hỏi và tích lũy thêm kinh nghiệm để phục vụ ngay chính công tác giảng dạy Toán ở trường THPT, Em chọn hướng nghiên cứu của luận văn thạc sĩ với đề tài: "**Một số dạng toán về dãy số và ứng dụng**" với mục đích: Hệ thống và đưa ra lời giải một cách chi tiết cho một số dạng bài toán về dãy số và ứng dụng trong bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở THPT.

Nhiệm vụ chính của luận văn bao hàm:

(i) Hệ thống hóa các kiến thức cơ sở về dãy số, một số tính chất về dãy số và một số ứng dụng của dãy số được giới thiệu trong chương trình phổ thông.

(ii) Chọn lọc một số dạng bài tập liên quan đến dãy số thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi và cố gắng đưa ra lời giải tường minh cho những bài tập mà tài liệu tham khảo chưa đưa ra lời giải chi tiết.

Để hoàn thành luận văn này, Em đã nhận được sự quan tâm, tạo mọi điều kiện của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên mà trực tiếp là Khoa Toán- Tin. Đặc biệt em luôn nhận được sự chỉ bảo, giúp đỡ từ tập thể các Thầy, Cô trong suốt quá trình học tập cao học. Nhân dịp này, cho phép Em được bày tỏ lòng biết ơn đến Trường ĐHKH, khoa Toán- Tin cùng tập thể các Thầy, Cô giáo đã tận tình truyền đạt kiến thức và hướng dẫn Em hoàn thành luận văn này, đồng thời cho phép Em được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS. Trịnh

Thanh Hải người đã tận tình hướng dẫn em trong suốt quá trình làm và hoàn thành luận văn.

Do một số điều kiện chủ quan và khách quan, luận văn với chủ đề "**Một số dạng toán về dãy số và ứng dụng**" cũng chưa thực sự hoàn thiện theo ý muốn. Em tha thiết mong các Thầy, Cô giáo chỉ bảo để Em hoàn thiện luận văn này.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Học viên

Nguyễn Đình Dùng

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Dãy số

1.1.1 Định nghĩa

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Dãy số thường được viết dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ trong đó u_1 là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = 1, 2, 3, \ldots, m$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của của dãy số hữu hạn: $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

Dãy số (u_n) được gọi là:

- Dãy đơn điệu tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$
- Dãy đơn điệu không giảm nếu $u_{n+1} \geq u_n$, với mọi $n = 1, 2,$ ...
- Dãy đơn điệu giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n = 1, 2,$ ...
- Dãy đơn điệu không tăng nếu $u_{n+1} \leq u_n$, với mọi $n = 1, 2,$ ...
- Dãy số (u_n) gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n < M$, với mọi $n = 1, 2, ...$; được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n > m$, với mọi $n = 1, 2, ...$; Một dãy số bị chặn nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

- Dãy số (u_n) gọi là tuần hoàn với chu kì k nếu $u_{n+k} = u_n$, với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) gọi là dãy dừng nếu tồn tại một số N_0 sao cho $u_n = C$ với mọi $n \geq N_0$, (C là hằng số, gọi là hằng số dừng).

1.1.2 Cách mô tả dãy số

(i) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ 1.1.1.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(ii) Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Ví dụ 1.1.2. *Dãy số (u_n) được xác định bởi:*

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 50 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} - 1975, \quad \text{với} \quad n = 2, 3, 4... \end{cases}$$

(iii) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ 1.1.3. *Cho $a_1 = 19, a_2 = 98$. Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, xác định a_{n+2} bằng số dư của phép chia $a_n + a_{n+1}$ cho 100.*

1.1.3 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1.1. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là hằng số thực a hữu hạn nếu với mọi số dương ε (có thể bé tùy ý), luôn tồn tại chỉ số $n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 có thể phụ thuộc vào ε và vào dãy số (u_n) đang xét), sao cho với mọi chỉ số $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ ta luôn có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hoặc còn nói rằng dãy số (u_n) hội tụ về a. Dãy số không hội tụ gọi là dãy phân kì.

Định lý 1.1.1. *Nếu một dãy số hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

Định lý 1.1.2. *(Tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass)*

a) Một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

b) Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

c) Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lý 1.1.3. *Nếu $(u_n) \to a$ và $(v_n) \subset (u_n), (v_n) \neq C$ thì $(v_n) \to a$.*

Định lý 1.1.4. *(Định lý kẹp giữa về giới hạn) Nếu với mọi $n \geq n_0$ ta luôn có $u_n \leq x_n \leq v_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Định lý 1.1.5. *(Định lý Lagrange) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ thì tồn tại $c \in (a;b)$ thỏa mãn: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Định lý 1.1.6. *(Định lý trung bình Cesaro) Nếu dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình cộng $\left(\dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}\right)$ cũng có giới hạn là a.*

Định lý có thể phát biểu dưới dạng sau: Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = a$ (Định lý Stolz).

Định lý 1.1.7. *Cho $f : D \to D$ là hàm liên tục, khi đó:*

(i) Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm tương đương phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm.

(ii) Gọi α, β là các mút trái, mút phải của D. Biết $\lim\limits_{x\to\alpha^+}[f(x) - x]$, $\lim\limits_{x\to\beta^-}[f(x) - x]$ cùng dương hoặc cùng âm. Khi đó phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong đó $f_n(x) = \underbrace{f(f(....(f(x)...)}_{n \text{ lần}}$.

Chứng minh. i). Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ thì x_0 cũng là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$. Ngược lại, nếu phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm thì $f(x) - x > 0$ hoặc $f(x) - x < 0$ với mọi $x \in D$ do đó $f_n(x) - x > 0$hoặc $f_n(x) - x < 0$ với mọi $x \in D$ nên phương trình $f_n(x) = x$ cũng vô nghiệm.
ii) Giả sử phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất là x_0 thì đây cũng là một nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$. Đặt $F(x) = f(x) - x$ do $F(x)$ liên tục trên $(x_0;\beta)$ và $(\alpha;x_0)$ nên $F(x)$ giữ nguyên một dấu.

Nếu $\lim\limits_{x\to\alpha^+}[f(x) - x]$ và $\lim\limits_{x\to\beta^-}[f(x) - x]$ cùng dương thì $F(x) > 0$ trong khoảng $(x_0;\beta)$ và $(\alpha;x_0)$ suy ra $f(x) > x$ với mọi $x \in D\backslash\{x_0\}$.

Xét $x_1 \in D\backslash\{x_0\}$ suy ra $f(x_1) > x_1$ hay $f(f(x_1)) > f(x_1) > x_1$ chứng tỏ $f_n(x_1) > x_1$ nên x_1 không là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$.
Vậy phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Nếu $\lim\limits_{x\to\alpha^+}[f(x)-x]$ và $\lim\limits_{x\to\beta^-}[f(x)-x]$ cùng âm chứng minh tương tự.

Ta thấy mọi nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$ đều là nghiệm của phương trình $f_n(x)=x$, do đó nếu phương trình $f_n(x)=x$ có nghiệm duy nhất thì phương trình $f_n(x)=x$ cũng có nghiệm duy nhất.

$\square$

Định lý 1.1.8. *Cho hàm $f: D\to D$ là hàm đồng biến. Dãy (x_n) thỏa mãn $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:*

(i) Nếu $x_1<x_2$ thì dãy (x_n) tăng.

(ii) Nếu $x_1>x_2$ thì dãy (x_n) giảm.

Chứng minh. (bằng phương pháp quy nạp)

(i) - Với $n=1$, ta có $x_1<x_2$ mệnh đúng.

- Giả sử mệnh đề đúng với $n=k(k\geq 1)$ tức $u_k<u_{k+1}$ khi đó $f(u_k)<f(u_{k+1})$ suy ra $u_{k+1}<u_{k+2}$.

(ii) Chứng minh tương tư. $\square$

Định lý 1.1.9. *Cho hàm $f: D\to D$ là hàm nghịch biến. Dãy (x_n) thỏa mãn $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó: Các dãy (x_{2n+1}) và (x_{2n}) đơn điệu, trong đó một dãy tăng, một dãy giảm.*

(i) Nếu dãy (x_n) bị chặn thì tồn tại $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}$ và $\beta=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+1}$.

(ii) Nếu $f(x)$ liên tục thì α,β, là nghiệm của phương trình

$$f(f(x))=x. \tag{1.1}$$

(iii) Nếu phương trình (1.1) có nghiệm duy nhất thì $\alpha=\beta$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha=\beta$.

Chứng minh.

(i) Vì $f(x)$ là hàm nghịch biến nên $f(f(x))$ đồng biến. Áp dụng định lý 1.1.2 ta có điều phải chứng minh.

(ii) Suy ra từ i).

(iii) Ta có $f(f(x_{2n}))=f(x_{2n+1})=x_{2n+2}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}f(f(x_{2n}))=\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n+2}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2n}=\alpha$ do $f(x)$ liên tục nên $f(f(\alpha))=\alpha$.

Chứng minh tương tự ta có $f(f(\beta))=\beta$.

Vậy α,β là nghiệm phương trình $f(f(x))=x$.