ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN MINH HẢI

HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN J-ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

BẢNG KÝ HIỆU

X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền giá trị của toán tử A
$\mathrm{Fix}(T)$	Tập điểm bất động của toán tử T
H	không gian Hilbert
C	tập con lồi đóng của H
I	ánh xạ đơn vị
P_C	Phép chiếu mêtrix H lên tập con lồi đóng C của H
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

Mở đầu

Cho X là một không gian Banach thực. Ký hiệu X^* là không gian liên hợp của X, C là một tập con lồi đóng khác rỗng của X, $A : X \to X$ là một ánh xạ phi tuyến. Bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trong không gian Banach (viết tắt là $\mathrm{VI}^*(A, C)$) được phát biểu như sau: Tìm phần tử $x^* \in X$ thỏa mãn:

$$x^* \in C : \quad \langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, \tag{0.1}$$

ở đây $j(x - x^*) \in J(x - x^*)$, $J : X \to 2^{X^*}$ là ánh xạ đối ngẫu của X. Nếu $X := H$ là một không gian Hilbert thực thì bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(A, C)$ trở thành bài toán tìm phần tử $x^* \in H$ thỏa mãn

$$x^* \in C : \quad \langle Ax^*, x - x^*\rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \tag{0.2}$$

Bài toán (0.2) ký hiệu là $\mathrm{VI}(A, C)$.

Bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}(A, C)$ được đưa ra và nghiên cứu đầu tiên bởi Stampacchia (xem [8]) vào những năm đầu của thập kỷ 60 trong khi nghiên cứu bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng. Từ đó phương pháp bất đẳng thức biến phân được quan tâm nghiên cứu rộng rãi và trở thành một công cụ hữu hiệu trong việc xây dựng các kỹ thuật để giải số nhiều bài toán trong kinh tế và kỹ thuật. Mặc dù đã có rất nhiều kết quả nghiên cứu về phương pháp giải bất đẳng thức biến phân, nhưng việc cải tiến các phương pháp nhằm gia tăng hiệu quả của nó luôn là một đề tài thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Trong [4] đã chỉ ra rằng bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(A, C)$ trong không gian Banach lồi đều và trơn đều tương đương với bài toán điểm bất động:

$$x^* = Q_C(x^* - \mu A x^*), \tag{0.3}$$

ở đây $\mu > 0$ là hằng số tùy ý và Q_C là một ánh xạ co rút không giãn theo tia từ X lên C. Do đó, phương pháp chiếu và một số biến thể của phương pháp có thể được dùng để giải bất đẳng thức biến phân (0.1). Tuy nhiên, ánh xạ co rút không giãn theo tia không dễ dàng tính toán khi C là một tập lồi đóng bất kỳ của X. Để giảm hạn chế này, trong không gian Hilbert, khi ánh xạ co rút không giãn là phép chiếu mêtric P_C chiếu X lên C, Yamada [11] đã giả thiết C là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : H \to H$ và đưa ra phương pháp lai đường dốc nhất (hybrid steepest-descent) giải bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}(A, C)$. Phương pháp này được phát triển từ không gian Hilbert sang không gian Banach, từ một ánh xạ lên một họ các ánh xạ.

Chú ý rằng, bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn, nói chung, là bài toán đặt không chỉnh. Do đó, bài toán bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VI}^*(A, C)$ hay $\mathrm{VI}(A, C)$, nói chung, cũng là những bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa nghiệm của bài toán không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Để giải bài toán này, chúng ta phải sử dụng những phương pháp giải ổn định. Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và khá hiệu quả là phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov (xem [3] và các tài liệu trích dẫn).

Mục đích của đề tài luận văn nhằm trình bày lại một kết quả nghiên cứu mới đây trong [9] của TS. Nguyễn Thị Thu Thủy về hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trên tập điểm bất động của một họ đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Banach.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 với tiêu đề "Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach" nhằm giới thiệu một số khái niệm và tính chất về không gian Banach lồi đều, trơn đều; Ánh xạ j-đơn điệu, ánh xạ đối ngẫu, ánh xạ không giãn; Bài toán đặt không chỉnh, bài toán điểm bất động và bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[3].

Chương hai với tiêu đề "Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu" nhằm giới thiệu về bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu trên tập điểm bất động chung của một họ đếm được các ánh xạ không giãn; trình bày hai phương pháp giải bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu, đó là phương pháp hiệu chỉnh Browder–Tikhonov và phương pháp hiệu chỉnh lặp. Nội dung của chương này được viết từ bài báo [9].

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu, các bạn đồng nghiệp tại trường PTDT Nội trú cấp II-III Bắc Quang, Hà Giang đã quan tâm và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành khóa học.

Xin cảm ơn các anh chị em học viên lớp cao học Toán K7A đã đoàn kết, đùm bọc và giúp đỡ nhau trong toàn khóa học.

Cuối cùng xin được gửi lời biết ơn sâu sắc đến những người thân trong gia đình tôi, những người luôn động viên, khuyến khích và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập. Thành quả đạt được chính là món quà mà tôi muốn dành tặng gia đình thân yêu của mình.

Tác giả

Nguyễn Minh Hải

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và tính chất về không gian Banach lồi đều, trơn đều; trình bày khái niệm và một vài tính chất của ánh xạ j-đơn điệu, ánh xạ đối ngẫu, ánh xạ không giãn; Trong phần thứ hai của chương, chúng tôi giới thiệu về bài toán đặt không chỉnh, bài toán điểm bất động và bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[3].

1.1 Không gian Banach

1.1.1 Không gian Banach lồi đều, trơn đều

Ký hiệu mặt cầu đơn vị trong không gian Banach X là $S_1(0) := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Không gian Banach X được gọi là có chuẩn khả vi Gâteaux (hoặc không gian trơn) nếu giới hạn sau

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}, \tag{1.1}$$

tồn tại với mọi $x, y \in S_1(0)$. Không gian Banach X được gọi là có chuẩn khả vi Gâteaux đều nếu mỗi $y \in S_1(0)$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với $(x, y) \in S_1(0) \times S_1(0)$.

Giả sử $dim(X) \geq 2$. Modul trơn của X là hàm $\rho_X : [0, \infty) \to [0, \infty)$ xác định bởi

$$\rho_X(\tau) = \sup \left\{ \frac{1}{2}\big(\|x + y\| + \|x - y\|\big) - 1 : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq \tau \right\}.$$

Không gian Banach X được gọi là trơn đều nếu:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Với $q > 1$, một không gian Banach X được gọi là q-trơn đều nếu tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho $\rho_X(\tau) \leq c\tau^q$. Dễ thấy rằng, nếu X là không gian q-trơn đều thì $q \leq 2$ và X là không gian trơn đều. Không gian Hilbert, không gian L^p (hoặc l^p) với $1 < p < \infty$, không gian Sobolev W_m^p với $1 < p < \infty$ là các không gian q-trơn đều nếu $1 < p \leq 2$ và là 2-trơn đều nếu $p \geq 2$.

Không gian Banach X được gọi là không gian lồi chặt nếu với mỗi $x, y \in S_1(0)$, $x \neq y$ thì

$$Vert(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$$

với mọi $\lambda \in (0, 1)$, và lồi đều nếu với mọi ε, $0 < \varepsilon \leq 2$, từ bất đẳng thức $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, và $\|x - y\| \geq \varepsilon$ suy ra tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$. Chú ý rằng, mọi không gian Banach lồi đều đều là không gian phản xạ và lồi chặt.