ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TOẢN

CÁC ĐỊNH LÝ HÀM KHẢ VI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC VÀ MỘT SỐ ĐÁNH GIÁ TIỆM CẬN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TOẢN

CÁC ĐỊNH LÝ HÀM KHẢ VI VỚI BẤT ĐẲNG THỨC VÀ MỘT SỐ ĐÁNH GIÁ TIỆM CẬN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan mọi thông tin và trích dẫn trong luận văn là trung thực, các số liệu và kết quả nghiên cứu không trùng lặp với các đề tài khác.

Thái Nguyên, ngày 26 tháng 03 năm 2015

Học viên

Nguyễn Văn Toản

Mở đầu

Trong bản luận văn *"Các định lý hàm khả vi với bất đẳng thức và một số đánh giá tiệm cận"* tác giả vận dụng các tính chất của các hàm khả vi một biến và nhiều biến để trình bày chứng minh của một số bất đẳng thức; các bất đẳng thức này được chứng minh bằng các phương pháp khác trong các tài liệu tham khảo. Các ví dụ chỉ ra chứng tỏ các định lý về hàm khả vi là một công cụ khá mạnh trong chứng minh các bất đẳng thức, đặc biệt là đối với các bất đẳng thức chứa số biến nhỏ. Trong bản luận văn có trình bày chứng minh một số bất đẳng thức khó (ví dụ bất đẳng thức Newton-Maclaurin, bất đẳng thức trong Ví dụ 1.24 Chương 1) dựa trên việc sử dụng các định lý về giá trị trung gian của các hàm khả vi một biến và lý thuyết cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến.

Đánh giá tiệm cận của các dãy là một chủ đề khó và được nhiều người quan tâm trong lý thuyết dãy và chuỗi số. Trong bản luận văn này tác giả đã trình bày chứng minh một số định lý về đánh giá tiệm cận của một lớp các dãy xác định bằng công thức truy toán dựa trên khai triển Maclaurin của các hàm số một biến và đưa ra các ví dụ minh họa. Một số trong các ví dụ minh họa này là các bài toán gặp trong các tài liệu về chủ đề thi Olympic Toán sinh viên và các tài liệu nâng cao về Giải tích toán học.

Bản luận văn *"Các định lý hàm khả vi với bất đẳng thức và một số đánh giá tiệm cận"* gồm Lời nói đầu, hai chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

- Chương 1. Các định lý về hàm khả vi và các bất đẳng thức.
- Chương 2. Đánh giá tiệm cận của một lớp các dãy số.

Trong Chương 1 tác giả tóm tắt các sự kiện cơ bản nhất của lý thuyết các hàm khả vi một biến, bài toán cực trị có điều kiện của hàm hai biến, hàm ba biến với một ràng buộc, bài toán tìm giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm hai biến khả vi trên miền phẳng đóng, bị chặn. Các bất đẳng thức trong các Ví dụ 1.1 - 1.12 Chương 1 chủ yếu được chứng minh dựa trên mối liên hệ giữa tính đơn điệu của hàm số với dấu đạo hàm cấp 1 của hàm một biến, các Ví dụ 1.13 - 1.16 trình bày chứng minh các bất đẳng thức dựa trên mối liên hệ giữa tính lồi, lõm và dấu đạo hàm cấp hai của hàm một biến, các Ví dụ 1.17 - 1.22 trình bày chứng minh các bất đẳng thức dựa trên các định lý về giá trị trung gian của các hàm khả vi, các Ví dụ 1.22 - 1.25 trình bày chứng minh các bất đẳng thức nhờ phương pháp nhân tử Lagrange để giải bài toán cực trị có điều kiện và phương pháp tìm giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm hai biến khả vi trên miền phẳng đóng, bị chặn.

Chương 2 định nghĩa khái niệm đánh giá tiệm cận và chứng minh một số định lý về đánh giá tiệm cận đối với một lớp các dãy số dương xác định bằng công thức truy toán dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ và các khẳng định liên quan. Các kết quả chủ yếu của chương này là các Định lý 2.1, Hệ quả 2.1, Định lý 2.2, Định lý 2.3, Hệ quả 2.2, Định lý 2.4. Các ví dụ áp dụng chủ yếu được đưa ra trong các Mục 2.2.3 và 2.2.7.

Danh mục tài liệu tham khảo gồm 05 tài liệu.

Để hoàn thành bản luận văn này tác giả đã nhận được sự giúp đỡ của các Thầy Cô trong Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, các phòng ban chức năng thuộc Đại học Thái Nguyên, các nhà toán học thuộc Viện Toán học - Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Thầy hướng dẫn, TS. Hoàng Văn Hùng - Viện Khoa học Cơ bản - Đại học Hàng Hải Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng cảm ơn chân thành đến tất cả các Thầy Cô, các nhân viên của các phòng ban chức năng nói trên và rất mong nhận được ý kiến đóng góp từ mọi phía đối với bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015

Nguyễn Văn Toản

Học viên Cao học Toán lớp B, khóa 06/2013-06/2015

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Chương 1

Các định lí về hàm khả vi và các bất đẳng thức

1.1 Đạo hàm, đạo hàm cấp cao của hàm một biến và các tính chất cơ bản

1.1.1 Các định nghĩa

Cho $f(x)$ là hàm số với tập xác định $D \subset \mathbb{R}$ và x_0 là một điểm trong của D. Giới hạn (nếu có)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$. Nếu thay giới hạn được xét bằng giới hạn trái (tương ứng, phải) tại x_0 ta có khái niệm *đạo hàm trái* (tương ứng, *phải*) tại x_0 , ký hiệu là $f'_-(x_0)$ (tương ứng, $f'_+(x_0)$. Hàm số có đạo hàm (tương ứng, đạo hàm trái, phải) tại x còn được gọi là hàm khả vi (tương ứng, khả vi trái, phải) tại x.

Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in D_1 \subset D$ thì hàm số $D_1 \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ trên miền D_1.

Đạo hàm của hàm số $f'(x)$ (nếu có) tại điểm $x_0 \in D_1$ gọi là đạo hàm cấp hai của $f(x)$ tại x_0, ký hiệu là $f''(x_0)$. Nếu $f''(x_0)$ tồn tại với mọi $x \in D_2 \subset D$ thì hàm số $D_2 \ni x \mapsto f''(x) \in \mathbb{R}$ gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x)$ trên miền D_2.

Tổng quát, đạo hàm của đạo hàm cấp $k-1$ (với $k \geq 2$) của $f(x)$ tại điểm trong x của tập xác định D (nếu tồn tại) được gọi là *đạo hàm cấp* k của $f(x)$ tại x, ký hiệu là $f^{(k)}(x)$. Nếu $f^{(k)}(x)$ tồn tại tại mọi $x \in D_k$ thì hàm số $D_k \ni x \mapsto f^{(k)}(x) \in \mathbb{R}$ gọi là *đạo hàm cấp k* của hàm số $f(x)$ trên miền D_k. Hàm số có đạo hàm cấp k trên miền G cũng được gọi là *khả vi đến cấp k trên G.*

Ta quy ước ký hiệu $f^{(0)}(x)$ chỉ chính hàm $f(x)$. Nếu tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm $f(x), g(x)$ có nghĩa ở lân cận điểm x và tồn tại $f'(x)$ và $g'(x)$ thì đạo hàm của các hàm này tại x cũng tồn tại và được ký hiệu tương ứng là

$$(f(x)+g(x))',\ (f(x)-g(x))',\ (f(x)g(x))',\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'.$$

1.1.2 Các tính chất cơ bản của đạo hàm và đạo hàm cấp cao

Tính chất 1.1. *Đạo hàm cấp bất kỳ có tính chất tuyến tính, tức là nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm cấp k trên miền D thì*

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))^{(k)} = \alpha f^{(k)}(x)+\beta g^{(k)}(x)$$

với mọi số thực α, β và mọi $x \in D$.

Tính chất 1.2. *Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm cấp n trên miền D thì đạo hàm cấp n của tích $f(x)g(x)$ cũng tồn tại trên D và*

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad \text{trong đó } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tính chất 1.3. *Giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = g(x_0)$. Khi đó hàm hợp $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ được xác định ở lân cận x_0 và có đạo hàm tại x_0. Đạo hàm của hàm $f(g(x))$ tại x_0 được tính theo công thức*

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Tính chất 1.4. *Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên miền D và $g(x)\neq 0$ trên D thì hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có đạo hàm trên D và*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

1.2 Các định lí về hàm khả vi

Mục này trình bày các định lý quan trọng nhất nói về tính chất của các hàm một biến khả vi. Chứng minh của các định lý này có trong hầu hết các giáo trình giải tích toán, chẳng hạn trong tài liệu [4] của tác giả Jean-Marie Monier. Tác giả chỉ đưa ra chứng minh Hệ quả 1.2 của Định lý Rolle.

1.2.1 Định lí Fermat

Định nghĩa 1.1. Hàm $f(x)$ gọi là có cực đại tại x_0 nếu x_0 là điểm trong của tập xác định và tồn tại một lân cận $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của x_0 sao cho

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \text{với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \tag{1.1}$$

Khi đó giá trị $f(x_0)$ gọi là một cực đại của $f(x)$. Nếu

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \tag{1.2}$$

thì $f(x_0)$ gọi là một *cực đại thực sự* tại x_0.

Khái niệm cực tiểu (tương ứng, cực tiểu thực sự) tại x_0 được định nghĩa tương tự bằng cách thay bất đẳng thức (1.1) (tương ứng, (1.2)) bằng các bất đẳng thức

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \text{với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$$

tương ứng,

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{với mọi } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Cực đại, cực tiểu của hàm $f(x)$ được gọi chung là *cực trị* của $f(x)$.

Định lí 1.1 (Fermat)**.** *Nếu $f(x)$ có cực trị tại x_0 và đồng thời khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*