ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUỐC THỊNH

ĐỊNH LÝ DAVENPORT SUY RỘNG ĐỐI VỚI ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUỐC THỊNH

ĐỊNH LÝ DAVENPORT SUY RỘNG ĐỐI VỚI ĐA THỨC TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 0113

Người hướng dẫn khoa học:

TS.VŨ HOÀI AN

THÁI NGUYÊN - NĂM 2015

newpage

BẢNG KÍ HIỆU

f	Hàm hữu tỷ
$n(f, a)$	Hàm đếm của f tại điểm a
$T(f)$	Hàm độ cao của f
$\mathbb{K}$	Trường đóng đại số, đặc số không
$\mathbb{R}$	Trường số thực

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS Vũ Hoài An. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người thầy của mình.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo trong Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã trực tiếp giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và tất cả mọi người đã quan tâm, tạo điều kiện, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, Tháng 3 năm 2015.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Trong [5], Hà Huy Khoái- Phạm Huy Điển đã đề cập đến Định lý Davenport sau đây đối với đa thức trên trường số phức :

Định lí A. Giả sử f, g là các đa thức trên $\mathbb{C}$ sao cho $f^3 \neq g^2$, f^3 và g^2 không có không điểm chung. Khi đó

$$\frac{1}{2}\deg f \leq \deg(f^3 - g^2) - 1.$$

Khẳng định tương tự của Định lí A đối với số nguyên vẫn còn chưa được chứng minh. Một tổng quát của Định lý Davenport đối với hàm nguyên p-adic sau đây đã đề cập trong [7] và được trình bầy lại trong [6].

Định lí B. Cho $f_1^{m_1}, ..., f_n^{m_n}$ là các hàm nguyên a-dic không có không điểm chung và độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}_p$; $m_1, ..., m_n$ là các số nguyên dương. Khi đó

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{m_i}\right) \max_{1 \leq i \leq n} \left\{T\left(r, f_i^{m_i}\right)\right\} \leq N\left(r, \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^{m_i}}\right) - \frac{n\left(n-1\right)}{2}\log r + O\left(1\right).$$

Phương pháp chứng minh Định lí B là sử dụng hai Định lý chính của lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình p - adic. Dưới góc độ của lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình p - adic, công việc tương tự của Định lí B đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không đã được đề cập trong [1]. Mặt khác, Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không sẽ có ứng dụng trong toán học phổ thông. Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi xem xét vấn đề:

Định lý Davenport suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không và ứng dụng.

2. Mục đích, nhiệm vụ và phương pháp nghiên cứu

Tổng hợp, trình bầy lại các bài giảng trong [1] về Định lý Davenport suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không.

Các kết quả của công việc này có tựa đề là Định lý Davenport suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không.

Đưa ra các ví dụ trong toán học phổ thông thể hiện sự tương tự của Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không với hàm số biến số thực và số nguyên.

3. Nội dung nghiên cứu

Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không.

Sự tương tự của Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không với hàm số biến số thực và số nguyên được thể hiện qua 21 ví dụ.

4. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, luận văn này gồm các phần như sau.

Chương 1: Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không

1.1. Phân bố giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không

1.2. Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không

Chương 2: Định lý Davenport suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không

2.1. Định lý Davenport suy rộng đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không

2.2. Sự tương tự của Định lý Davenport đối với đa thức trên trường đóng đại số, đặc số không với hàm số biến số thực và số nguyên

Mục lục

Chương 1

ĐỊNH LÝ DAVENPORT ĐỐI VỚI HÀM HỮU TỶ TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ, ĐẶC SỐ KHÔNG

Định lý Davenport đã được phát biểu trong [5] và chưa chứng minh. Trong [1], Định lý Davenport đã được xem xét dưới góc độ của phân bố giá trị đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.

Vì vậy, trong chương này, trước hết chúng tôi trình bày lại về phân bố giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không ở Mục 1.1. Nội dung phần này đã được đề cập trong [1] và trình bày lại ở [3].

Ở mục 1.2. chúng tôi trình bày lại phát biểu và chứng minh Định lý Davenport đã được đề cập trong [1].

Nội dung của phần này đã được đề cập trong [1] và trình bày lại ở đây.

1.1 Phân bố giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc số không.

Một trường $\mathbb{K}$ được gọi là đóng đại số nếu mọi đa thức một ẩn khác hằng với hệ số trong $\mathbb{K}$ đều có nghiệm trong $\mathbb{K}$.

Trường số phức $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số vì mọi đa thức khác hằng thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$.

Trường $\mathbb{Q}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = x^4 + 5$ không có nghiệm trong $\mathbb{Q}$ mặc dù các hệ số của đa thức đều thuộc $\mathbb{Q}$.

Trường $\mathbb{R}$ không là trường đóng đại số vì đa thức $P(x) = \sqrt{3}x^2 + 1$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$ mặc dù các hệ số của đa thức đều thuộc $\mathbb{R}$.

Tiếp theo, ta định nghĩa khái niệm đặc số của trường đóng đại số. Số 0 được gọi là đặc số của trường $\mathbb{K}$ nếu $n1 \neq 0$ với mọi số tự nhiên $n > 0$. Nếu có một số tự nhiên $n \neq 0$ sao cho $n1 = 0$ thì số nhỏ nhất thỏa mãn tính chất này được gọi là đặc số của trường $\mathbb{K}$, ký hiệu là *char*($\mathbb{K}$).

Ví dụ, trường $\mathbb{Q}$ có đặc số 0, trường $\mathbb{Z}_{11}$ có đặc số 11 vì $11.\overline{1} \equiv \overline{0}$ và 11 là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này.

Nếu $char(\mathbb{K}) = n > 0$ thì $nx = 0$ với mọi $x \in \mathbb{K}$ vì $nx = n(1x) = (n1)x = 0x$.

Từ đây trở đi, ta luôn ký hiệu $\mathbb{K}$ là trường đóng đại số, đặc số không.

Giả sử f là đa thức khác hằng có bậc n trên $\mathbb{K}$ và a là không điểm của f. Khi đó ta viết $f = (z-a)^m P(z)$ với $P(a) \neq 0$ và l là số nguyên dương. Ta gọi m là bội của không điểm a và đặt $\mu_f^0(a) = m$. Ký hiệu $n(f)$ là số các không điểm của f tính cả bội;

$n(f,d) = n(f-d)$;

$n_l(f) = \sum\limits_{i=1}^{q} \min\{m_i; l\}$; ở đó $f = (z-a_1)^{m_1} \dots (z-a_q)^{m_q}$;

$n_1(f,d) = n_1(f-d)$;

$n_0(f) = q$; $n_0(f,d) = n_0(f-d)$; $T(f) = \deg f$

Chú ý rằng $n_1(f)$ là số các không điểm của f mà mỗi không điểm được tính với bội là 1, $n_0(f)$ là số các không điểm phân biệt của f. Ta có $n_1(f) = n_0(f)$

Ví dụ 1.1. Xét đa thức $f(x) = (x+1)^2(x+2)^3(x+4)^5$ trên $\mathbb{R}$. Ta có -1, -2, -4 là các không điểm phân biệt của f với bội lần lượt là 2, 3, 5.

Mặt khác $n_0(f) = 3$, $n_6(f) = 10$, $n_2(f) = 6$, $n_4(f) = 9$; $\deg f = 10$.

Ví dụ 1.2. Xét đa thức $f(x) = (x+1)^2(x+2)^3(x+4)^5(x^{2000}+1)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$n_0(f) = 3 = n_1(f), n_6(f) = 10, n_2(f) = 6, n_4(f) = 9; \deg f = 2010; n(f) = 10.$$

Ví dụ 1.3. Xét đa thức $f(x) = (x+1)^2(x+2)^3(x+4)^5(x^{2000}+1)$ trên $\mathbb{C}$. Ta có

$$n_0(f) = 4 = n_1(f), n_6(f) = 2010, n_4(f) = 2009; \deg f = 2010; n(f) = 2010 = \deg f.$$

Giả sử $f = \frac{f_1}{f_2}$ là hàm hữu tỷ trên $\mathbb{K}$, ở đó $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x]$ và không có không điểm chung trên $\mathbb{K}$, $d \in \mathbb{K}$, ta ký hiệu

$n(f) = n(f_1); n(f,d) = n(f_1 - df_2)$;

$n_1(f) = n_1(f1); n_1(f,d) = n_1(f_1 - df_2);$
$n_0(f,d) = n_0(f_1 - df_2); n(f,\infty) = n(f_2)$
$n_1(f,\infty) = n_1(f_2); n_0(f,\infty) = n_0(f_2)$
$\deg f = \deg f_1 - \deg f_2; T(f) = \max\{\deg f_1, \deg f_2\}.$

Ví dụ 1.4. Xét hàm hữu tỷ sau đây trên $\mathbb{K}$

$$f(x) = \frac{(x-1)^4(x-5)^7(x-4)^9(x-9)}{(x+1)^3(x+2)^2(x+3)^5(x-3)}$$

Ta có các không điểm của f là 1, 4, 5, 9 và $\mu_f^0(1) = 4, \mu_f^0(5) = 7, \mu_f^0(4) = 9, \mu_f^0(9) = 1.$
Ta có các cực điểm của f là -1, -2, -3, 3 và $\mu_f^\infty(-1) = 3, \mu_f^\infty(-2) = 2, \mu_f^\infty(-3) = 5.$

Lấy $l = 9$, ta có $n_9(f) = 4 + 7 + 9 + 1 = 21$, $n_9(f,\infty) = 3+2+5+1 = 11.$

Lấy $l = 5$, ta có $n_5(f) = 15$, $n_5(f,\infty) = 11.$

Lấy $l = 1$, ta có $n_1(f) = 4$, $n_1(f,\infty) = 4, n_0(f) = 4, n_0(f,\infty) = 4.$

Ta có $\deg f = (4+7+9+1) - (3+2+5+1) = 10$, $T(f) = 21.$

Định nghĩa 1.1. Đường cong hữu tỷ $f : \mathbb{K} \to P^n(\mathbb{K})$ là một lớp tương đương của các bộ $(n+1)$ đa thức $(f_1, ..., f_{n+1})$ sao cho $f_1, ..., f_{n+1}$ không có không điểm chung trên $\mathbb{K}$. Hai bộ $(n+1)$ đa thức $(f_1, ..., f_{n+1})$ và $(g_1, ..., g_{n+1})$ là tương đương với nhau khi và chỉ khi tồn tại $c \in \mathbb{K}^*$ sao cho $g_i = cf_i$ với mọi $i = 1, ..., n+1$.

Ký hiệu $\tilde{f} = (f_1 : ... : f_{n+1})$ là một biểu diễn của f. Khi đó ta viết

$$f : K \to P^n(\mathbb{K})$$
$$z \mapsto \tilde{f}(z) = (f_1(z) : ... : f_n(z)).$$

Giả sử f và g là hai đường cong hữu tỷ từ $\mathbb{K}$ vào $P^n(\mathbb{K})$ với hai biểu diễn $\tilde{f} = (f_1(z) : ... : f_{n+1}(z))$ và $\tilde{g} = (g_1(z) : ... : g_{n+1}(z))$ tương ứng. Ta nói f đồng nhất g và viết $f \equiv g$ khi và chỉ khi tồn tại $c \in \mathbb{K}^*$ sao cho $g_i = cf_i$ với mọi $i = 1, ..., n+1$.

Định nghĩa 1.2. Độ cao đường cong hữu tỷ f từ $\mathbb{K}$ vào $P^n(\mathbb{K})$ với biểu diễn $\tilde{f} = (f_1 : ... : f_{n+1})$ được xác định bởi $T(f) = \max\limits_{1 \le i \le n+1} \deg f_i$, ở đó $\deg f_i$ là bậc của đa thức f_i với $i = 1, ..., n+1$.

Nhận xét 1.1. Độ cao của đường cong hữu tỷ f được xác định duy nhất.

Thật vậy, nếu f là đường cong hữu tỷ với $\tilde{f} = (f_1 : ... : f_{n+1})$ và $\tilde{g} = (g_1 : ... : g_{n+1})$