ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TẠ QUANG SỸ

ĐỘ ĐO MONGE-AMPÈRE TRÊN CÁC TẬP ĐA CỰC VÀ PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TẠ QUANG SỸ

ĐỘ ĐO MONGE-AMPÈRE TRÊN CÁC TẬP ĐA CỰC VÀ PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPÈRE PHỨC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **60.46.01.02**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG**

THÁI NGUYÊN - 2015

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Tạ Quang Sỹ

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo, bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trung tâm giáo dục thường xuyên, huyện Mai Châu, tỉnh Hoà Bình cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 7 năm 2015

Tác giả

Tạ Quang Sỹ

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Xét phương trình Monge-Ampère phức $(dd^c u)^n = \mu$, trong đó μ là độ đo Radon không âm và $(dd^c .)^n$ là toán tử Monge-Ampère phức. Ta biết rằng nếu μ đặt khối lượng trên tập đa cực, thì nghiệm đối với phương trình $(dd^c u)^n = \mu$ nói chung là không duy nhất [13]. Vì thế câu hỏi về sự tồn tại nghiệm của phương trình luôn nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều người. Kết quả đầu tiên thuộc về Lempert L. [10] (1983) đạt được trong trường hợp khi giá của độ đo đã cho là điểm đơn. Lempert đã xét nghiệm với giá trị biên giải tích thực và với kỳ dị logarit gần với giá của độ đo. Tiếp đó, Celic H. I., và Poletsky E. A. [7] (1997) nghiên cứu phương trình Monge-Ampère với độ đo Dirac. A. Zeriahi [13] (1997) đã chứng minh rằng phương trình Monge-Ampère phức giải được đối với các giá trị biên liên tục. Xing Y. [12] (1999) đã tổng quát kết quả của Zeriahi A. trong trường hợp các giá trị biên đã cho là đồng nhất 0. Xing đã xét các độ đo xác định bởi tổng của tổ hợp tuyến tính của một số đếm được các độ đo Dirac với giá compact và độ đo Monge-Ampère chính qui đã biết. Chúng ta sẽ xét lớp $\mathcal{E}$, đó là lớp lớn nhất các hàm đa điều hoà dưới không âm được xác định trên miền siêu lồi Ω, mà đối với nó toán tử Monge-Ampère phức xác định tốt lớp $\mathcal{E}$ đã được Cegrell phát triển và nghiên cứu trong các công trình nền tảng [4] [5] . Chúng ta sẽ chứng minh rằng trong lớp năng lượng $\mathcal{E}$ phương trình Monge-Ampère phức có nghiệm đối với lớp các độ đo kỳ dị rộng hơn so với Zeriahi A. và Xing Y.

Theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: "***Độ đo Monge-Ampère trên các tập đa cực và phương trình Monge-Ampère phức***".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu về toán tử Monge-Ampère trên các tập đa cực và giải phương trình Monge-Ampère trong lớp năng lượng $\mathcal{E}$ với phần kỳ dị khá lớn.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Nghiên cứu một số tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère.

- Nghiên cứu về xấp xỉ hàm đa điều hoà dưới trong lớp năng lượng $\mathcal{E}$, toán tử Monge-Ampère trên các tập đa cực và giải phương trình Monge-Ampère trong $\mathcal{E}$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của giải tích hàm hiện đại, các phương pháp của lý thuyết thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 40 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về về xấp xỉ hàm đa điều hoà dưới trong lớp năng lượng $\mathcal{E}$, toán tử Monge-Ampère trên các tập đa cực và giải phương trình Monge-Ampère trong $\mathcal{E}$.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

1.1.1. Định nghĩa. *Cho X là một không gian tôpô, hàm* $u : X \to \big[-\infty, +\infty$ *được gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mọi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tập hợp* $x \in X : u(x) < \alpha$ *là mở trong X.*

1.1.2. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u : \Omega \to \big[-\infty, \infty$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω*. Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a \in \Omega$ *và* $b \in \mathbb{C}^n$*, hàm* $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega$ *. Trong trường hợp này, ta viết* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$*. (ở đây kí hiệu* $\mathcal{PSH}(\Omega)$ *là lớp hàm đa điều hoà dưới trong* Ω*).*

Sau đây là một vài tính chất của hàm đa điều hoà dưới:

1.1.3. Mệnh đề. *Nếu* $u, v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ *và* $u = v$ *hầu khắp nơi trong* Ω*, thì* $u \equiv v$.

1.1.4. Mệnh đề. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền bị chặn, tức là nếu* Ω *là một tập con mở liên thông bị chặn của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in PSH(\Omega)$*, thì hoặc u là hằng hoặc với mỗi* $z \in \Omega$,

$$u(z) < \sup_{\omega \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{y \to \omega \\ y \in \Omega}} u(y).$$

1.1.5. Định nghĩa. *Tập hợp* $E \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm* $a \in E$ *đều có một lân cận* V *của* a *và một hàm* $u \in \mathcal{PSH}(V)$ sao cho $E \cap V \subset \{z \in V : u(z) = -\infty\}$.

1.1.6. Hệ quả. *Các tập đa cực có độ đo* (Lebesgue) *không.*

1.1.7. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở trong* $\mathbb{C}^n$. *Khi đó*

(i) *Họ* $\mathcal{PSH}(\Omega)$ *là nón lồi, tức là nếu* α, β *là các số không âm và* $u, v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, *thì* $\alpha u + \beta v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

(ii) *Nếu* Ω *là liên thông và* $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *là dãy giảm, thì* $u = \lim\limits_{j \to \infty} u_j \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ *hoặc* $u \equiv -\infty$.

(iii) *Nếu* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *và nếu* $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *hội tụ đều tới* u *trên các tập con compact của* Ω, *thì* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

(iv) *Giả sử* $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{PSH}(\Omega)$ *sao cho bao trên của nó* $u = \sup\limits_{\alpha \in A} u_\alpha$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên* u^* *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

1.1.8. Hệ quả. *Cho* Ω *là một tập mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* ω *là một tập con mở thực sự khác rỗng của* Ω. *Nếu* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $v \in \mathcal{PSH}(\omega)$, *và* $\lim\limits_{x \to y} v(x) \le u(y)$ *với mỗi* $y \in \partial\omega \cap \Omega$, *thì công thức*

$$\omega = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{trong } \omega \\ u & \text{trong } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

xác định một hàm đa điều hoà dưới trong Ω.

1.1.9. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$.

(i) *Cho* u, v *là các hàm đa điều hoà trong* Ω *và* $v > 0$. *Nếu* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là lồi, thì* $v\phi(u / v)$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

(ii) *Cho* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, *và* $v > 0$ *trong* Ω. *Nếu* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là lồi và tăng dần, thì* $v\phi(u / v)$ *là đa điều hoà dưới trong* Ω.

(iii) *Cho* $u, -v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$, $u \geq 0$ *trong* Ω, *và* $v > 0$ *trong* Ω. *Nếu* $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *là lồi và* $\phi(0) = 0$, *thì* $v\phi(u / v) \in \mathcal{PSH}(\Omega)$.

1.1.10. Định lý. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và*

$$F = \{z \in \Omega : v(z) = -\infty\}$$

là một tập con đóng của Ω, *ở đây* $v \in \mathcal{PSH}(\Omega)$. *Nếu* $u \in \mathcal{PSH}(\Omega \setminus F)$ *là bị chặn trên, thì hàm* $\overline{u}$ *xác định bởi* $\overline{u}(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in \Omega \setminus F) \\ \limsup\limits_{\substack{y \to z \\ y \notin F}} u(y) & (z \in F) \end{cases}$

là đa điều hoà dưới trong Ω. *Nếu* u *là đa điều hoà và bị chặn trong* $\Omega \setminus F$, *thì* $\overline{u}$ *là đa điều hoà trong* Ω. *Nếu* Ω *là liên thông, thì* $\Omega \setminus F$ *cũng liên thông.*

1.1.11. Định nghĩa. *Một miền bị chặn* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *được gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại hàm đa điều hòa dưới liên tục* $\psi : \Omega \to (-\infty, 0)$ *sao cho*

$$\Omega_c = \{z \in \Omega : \psi(z) < c\} \Subset \Omega \text{ với mọi } c < 0.$$