ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**TRẦN QUANG HUY**

# ĐỘ NHẠY NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên - 2015**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**TRẦN QUANG HUY**

# ĐỘ NHẠY NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

**Chuyên ngành:** **Toán ứng dụng**
**Mã số:** **60.46.01.12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Người hướng dẫn khoa học:**

**GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN TẤN**

**Thái Nguyên - 2015**

# Mục lục

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi.

*Thái Nguyên, ngày 30 tháng 05 năm 2015*

Học viên

**Trần Quang Huy**

# TÓM TẮT NỘI DUNG

Cũng giống như trong nhiều ngành toán học khác, các vấn đề chủ yếu được nghiên cứu trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân là sự tồn tại nghiệm, tính liên tục của tập nghiệm theo tham số, và các thuật toán tìm nghiệm. Nội dung chính trong luận văn này là bài toán dưới đây.

Xét $H$ là một không gian Hilbert thực, $M$ và $\Lambda$ là hai tập tham số khác rỗng lấy trong hai không gian định chuẩn nào đó, $f : H \times M \to H$ là một ánh xạ đơn trị, $K : \Lambda \to 2^H$ là một ánh xạ đa trị nhận giá trị là các tập lồi đóng, khác rỗng. Xét bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\lambda) \text{ sao cho} \\ < f(x,\mu), y - x > \geq 0 \ \forall y \in K(\lambda), \end{cases} \tag{0.1}$$

trong đó $(\mu, \lambda) \in M \times \Lambda$ là cặp tham số của bài toán và $< \cdot, \cdot >$ là ký hiệu tích vô hướng trong $H$. Với cặp tham số $(\overline{\mu}, \overline{\lambda}) \in M \times \Lambda$ cho trước, ta có thể xem (0.1) như là một bài toán nhiễu của bất đẳng thức biến phân dưới đây

$$\begin{cases} \text{Tìm } x \in K(\overline{\lambda}) \text{ sao cho} \\ < f(x,\overline{\mu}), y - x > \geq 0 \ \forall y \in K(\overline{\lambda}). \end{cases} \tag{0.2}$$

Giả sử $\overline{x}$ là một nghiệm của (0.2). Chúng ta muốn biết xem liệu (0.1) có thể có nghiệm $x = x(\lambda, \mu)$ ở gần $\overline{x}$ khi $(\lambda, \mu)$ ở gần $(\overline{\lambda}, \overline{\mu})$ hay không, và hàm $x(\mu, \lambda)$ có dáng điệu như thế nào? Hay nói một cách khác là ta cần nghiên cứu độ nhạy của nghiệm $\overline{x}$ đối với sự thay đổi của $(\mu, \lambda)$.

# LỜI CẢM ƠN

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình, BGH trường THPT Nhân Chính và các bạn trong lớp Cao học K7A trường Đại học Khoa học, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

***Thái Nguyên, 2015***

**Trần Quang Huy**

*Học viên Cao học Toán K7A,*

*Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên*

# DANH SÁCH KÝ HIỆU

Trong toàn luận văn, ta dùng những ký hiệu với các ý nghĩa xác định trong bảng dưới đây:

| | |
|---|---|
| $B(a, r)$ | Hình cầu mở tâm $a$, bán kính $r$ |
| $\overline{B}(a, r)$ | Hình cầu đóng tâm $a$, bán kính $r$ |
| $\overline{B}_X$ | Hình cầu đơn vị trong $X$ |
| $A_\delta$ | Tập những điểm cách $A$ không quá $\delta$ |
| $d(A, B)$ | Khoảng cách Hausdorff giữa hai tập $A, B$ |
| $\|\| \cdot \|\|$ | Chuẩn |
| $U_{x_0}$ | Lân cận của $x_0$ |
| $X^*$ | Không gian đối ngẫu của $X$ |
| $F : X \rightrightarrows Y$ | Ánh xạ đa trị từ $X$ vào $Y$ |
| $N_K(x)$ | Nón pháp tuyến của tập $K$ tại $x$ |
| $\partial\varphi(x)$ | Dưới vi phân của $\varphi$ tại $x$ |
| dom $G$ | Miền hữu hiệu của $G$ |
| graf $G$ | Đồ thị của $G$ |

# MỞ ĐẦU

Lý thuyết bất đẳng thức biến phân đã ra đời cách đây hơn 50 năm với các công trình quan trọng của G. Stampacchia, P. Hartman, G. Fichera, J. L. Lions và F.E. Brower. Trong suốt thời gian đó, lý thuyết này đã thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Đã có rất nhiều những bài báo, những cuốn sách đề cập bất đẳng thức biến phân và ứng dụng của chúng. Hiện nay, những bài toán phụ thuộc tham số đang được các nhà toán học và các nhà khoa học trong những chuyên ngành khác quan tâm nghiên cứu rất nhiều. Những kết quả đó đã được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực. Vậy lý thuyết biến phân nghiên cứu vấn đề gì? Sau đây, chúng tôi xin đưa ra một số bài toán của bất đẳng thức biến phân.

Giả sử $K$ là một tập lồi đóng trong một không gian định chuẩn $X$, và $f : K \to X^*$ là một ánh xạ đơn trị từ $K$ vào không gian đối ngẫu $X^*$ của $X$. Bài toán "Tìm $\overline{x} \in K$ sao cho $< f(\overline{x}), x - \overline{x} > \geq 0$ với mọi $x \in K$" được gọi là bất đẳng thức biến phân xác định bởi toán tử $f$ trên tập $K$.

Nếu $F : K \to 2^{X^*}$ là một ánh xạ đa trị từ $K$ vào $X^*$ thì bài toán "Tìm $\overline{x} \in K$ sao cho tồn tại $x^* \in F(\overline{x})$ thỏa mãn $< x^*, x - \overline{x} > \geq 0$ với mọi $x \in K$" được gọi là *bất đẳng thức biến phân suy rộng* xác định bởi tập $K$ và toán tử $F$.

Khi toán tử $f(F)$ phụ thuộc tham số $\mu$ và tập hạn chế $K$ phụ thuộc tham số $\lambda$ nào đó thì bài toán trên được gọi là *bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số* (hay tương ứng là bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số). Ở đây, $(\mu, \lambda)$ là cặp tham số của bài toán.

Bất đẳng thức biến phân phụ thuộc tham số và bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số, cùng với các ứng dụng khác nhau của chúng là nội dung chính trong luận văn này.

Luận văn bao gồm ba chương:

• **Chương 1. Kiến thức chuẩn bị**

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kết quả quen thuộc của các không gian được dùng trong luận văn này; các khái niệm và một số kết quả của ánh xạ đa trị; nhắc lại bài toán tối ưu.

• **Chương 2. Độ nhạy nghiệm của bài toán biến phân suy rộng.**

Chương này, chúng tôi trình bày các khái niệm cơ bản; các kết quả phụ trợ; các tính chất liên tục của nghiệm bất đẳng thức biến phân suy rộng phụ thuộc tham số; các trường hợp đặc biệt và các ứng dụng.

• **Chương 3. Tính liên tục Hölder của nghiệm bài toán biến phân phụ thuộc tham số.**

Trong chương này, chúng tôi trình bày các tính chất liên tục Hölder của nghiệm của $P(\theta, \lambda)$; các kết quả bổ trợ sẽ dùng trong chứng minh các định lý chính; cuối cùng là các kết quả về tính liên tục kiểu Lipchitz - Hölder của ánh xạ nghiệm theo tham số.

*Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015*

**Trần Quang Huy**
*Học viên Cao học Toán K7A*
*Chuyên ngành Toán ứng dụng*
*Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên*