

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

-----

**TRẦN THỊ HỒNG NHUNG**

**BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI**  
**VỚI CHUYỂN ĐỘNG XOAY VÒNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2015**

## MỤC LỤC

	Trang
<b>Mục lục.....</b>	<b>1</b>
<b>Lời nói đầu.....</b>	<b>2</b>
<b>Chương 1 Một số cải biên của bài toán Tháp Hà Nội.....</b>	<b>4</b>
1.1 Lịch sử bài toán Tháp Hà Nội .....	4
1.2 Một số phát triển và cải biên của bài toán Tháp Hà Nội .....	15
1.3 Tài liệu về bài toán Tháp Hà Nội .....	26
<b>Chương 2 Bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng .....</b>	<b>28</b>
2.1 Các tính chất cơ bản của bài toán Tháp Hà Nội xoay vòng .....	28
2.2 Thuật toán lập cho bài toán Tháp Hà Nội xoay vòng .....	45
2.3 Bài toán Tháp Hà Nội với hạn chế chuyển động các đĩa .....	52
<b>Kết luận.....</b>	<b>64</b>
<b>Tài liệu tham khảo.....</b>	<b>65</b>

## LỜI NÓI ĐẦU

*Bài toán Tháp Hà Nội* được nhà toán học Pháp Edouard Lucas nghĩ ra năm 1882 (xem [17]) và phổ biến vào năm 1883 dưới dạng một trò chơi, là một bài toán thường được giới thiệu trong các sách về các trò chơi toán học và sử dụng trong các giáo trình Tin học như một ví dụ điển hình về thuật giải đệ qui, lập trình căn bản và độ phức tạp tính toán.

*Trò chơi Tháp Hà Nội* không chỉ thú vị ở chỗ nó mang tên Hà Nội, thủ đô của Việt Nam mà nó còn hấp dẫn các nhà nghiên cứu Toán học và Công nghệ thông tin bởi nó liên quan đến nhiều vấn đề của Toán – Tin học như giải thuật đệ qui, hệ đếm, tam giác Pascal, thảm Sierpinski, Fractal, lý thuyết đồ thị và chu trình Hamilton, ô tô mát hữu hạn, độ phức tạp tính toán,... Các bài toán Tháp Hà Nội mở rộng hoặc cải biên gợi ý cho nhiều nghiên cứu mới trong toán học và khoa học máy tính.

Đã có hai cuốn sách chuyên khảo đầu tiên viết về Bài toán Tháp Hà Nội: *The Tower of Hanoi – Myths and Maths* [16] của Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović, Ciril Petr xuất bản năm 2013 và cuốn sách hai tập *Classical Tower of Hanoi Problem and Its Generalizations* [18] của A.A.K. Majumdar xuất bản năm 2012 – 2013. Chỉ tính riêng số bài báo nghiên cứu về bài toán Tháp Hà Nội trong lĩnh vực Toán học và Tin học đã có đến gần 500 bài với khoảng 250 bài với đầu đề có cụm từ "The Tower of Hanoi", đăng trên gần 200 tạp chí khoa học có uy tín (xem thống kê Tài liệu trong [7], [16] và [22], tiếc rằng hình như chưa có bài nghiên cứu nào của người Việt Nam về bài toán Tháp Hà Nội). Đó là chưa kể đến những bài viết về sử dụng bài toán Tháp Hà Nội trong khoa học giáo dục, sinh – y học hoặc những cuốn sách về tin học hay toán trò chơi, trong đó có trình bày về trò chơi Tháp Hà Nội.

Sau hơn 100 năm, bài toán Tháp Hà Nội đã có những cải biên và tổng quát hóa (trò chơi Tháp Hà Nội với nhiều cọc, trò chơi Tháp Hà Nội với các đĩa màu, trò chơi Tháp Hà Nội với hạn chế hướng chuyển đĩa, trò chơi Tháp Hà Nội song song,...). Những cải biên và tổng quát hóa này dẫn đến những vấn đề toán học thú vị, thậm chí dẫn tới nhiều bài toán hiện nay chưa có lời giải.

Dựa trên các bài báo của các tác giả nước ngoài, Luận văn *Bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng* có mục đích trình bày các tính chất cơ bản của bài toán Tháp Hà Nội với hạn chế đặt lên chuyển động – một biến thể của bài toán Tháp Hà Nội, đặc biệt là mô tả giải thuật lặp để giải quyết bài toán Tháp Hà Nội xoay vòng.

Luận văn gồm Phần mở đầu, hai chương và Tài liệu tham khảo.

### **Chương 1** *Một số cải biên của bài toán Tháp Hà Nội*

Chương 1 giới thiệu tổng quan về lịch sử phát triển trò chơi Tháp Hà Nội và một số biến thể của bài toán. Các tư liệu trong Chương này được bổ sung chi tiết và thời sự hơn so với [3] và [5].

### **Chương 2** *Bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng*

Chương 2 trình bày các tính chất, lời giải bài toán bằng giải thuật lặp của bài toán Tháp Hà Nội với chuyển động xoay vòng.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS TS Tạ Duy Phương, Viện Toán học. Đặc biệt Thầy đã cung cấp nhiều tài liệu và biên tập kỹ luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với Thầy.

Tôi xin được cảm ơn khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và Trường Trung học Phổ thông Hòn Gai – Thành phố Hạ Long đã quan tâm giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện kế hoạch học tập.

Xin được cảm ơn người thân, đồng nghiệp, bạn bè đã cổ vũ động viên tôi trong suốt quá trình học cao học và làm luận văn.

Hạ Long, 10.4.2015

Trần Thị Hồng Nhung

## CHƯƠNG I

### MỘT SỐ CÁI BIÊN CỦA BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

#### 1.1 Lịch sử Bài toán Tháp Hà Nội

Dưới đây là những tư liệu quý về trò chơi Tháp Hà Nội: Bìa của hộp đựng trò chơi *Tháp Hà Nội* (được làm bằng gỗ), sản xuất lần đầu tiên tại Paris năm 1883 và hai tờ hướng dẫn qui tắc chơi (xem: <http://vi.wikipedia.org/wiki>).

Trên tờ bìa có hình tháp 10 tầng, cây tre, người Annam và dòng chữ: *La Tour d'Hanoi, Veritable casse-tête Annamite Jeu, rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam) du college Mandarin Li-Sou-Stian - Tháp Hà Nội, Trò chơi trí tuệ của người Annam, được mang về từ Bắc Kỳ bởi giáo sư N. Claus (ở Siam), trường trung học Li-Sou-Stian.*



### **Bìa của hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội được bán lần đầu tại Paris, 1883**

Năm 1884, de Parville (xem [16], trang 2-3) đã tiết lộ: Giáo sư N. Claus chính là ả danh(nickname) của nhà toán học Eduard Lucas (N. Claus de Siam là đảo từ của E. Lucas d'Amiens, Amiens là quê của E. Lucas. Li-Sou-Stian là đảo từ của Sant Louis, trường trung học ở Paris, nơi Ông dạy học vào những năm đó).

Dựa trên phân tích hình vẽ trên hộp đựng trò chơi, “bờ thành của tháp được mô tả tỉ mỉ đến từng chi tiết, người nông dân Annam vẽ rất thực,...”, có người cho rằng, thật sự đã có người bạn của E. Lucas mang các thông tin và trò chơi này từ Hà Nội về Paris. Cũng không hẳn là không có lí!

Dưới đây là tờ hướng dẫn thứ nhất giới thiệu trò chơi Tháp Hà Nội được sản xuất lần đầu tiên tại Paris và bản dịch:

### **THÁP HÀ NỘI**

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

Trò chơi trí tuệ của người Annam  
Trò chơi được đem về từ Đông Kinh  
bởi Giáo sư N. CLAUS (DE SIAM)  
Trường trung học Li-Sou-Stian!

Trò chơi này lần đầu được tìm thấy trong cuốn sách có minh họa tiếng Quan thoại FER-FER-TAM-TAM, sẽ được xuất bản trong tương lai gần, bởi chính phủ bảo hộ. Tháp Hà Nội có các đĩa, nhỏ dần, có số lượng thay đổi, mà chúng tôi làm bằng gỗ, có lỗ ở giữa. Ở Nhật Bản, Trung Quốc, và ở Đông Kinh (Tonkin-Bắc Kỳ), chúng được làm bằng sứ.

Trò chơi có mục đích là dỡ bỏ từng đĩa, và đặt vào cột bên cạnh, theo các quy tắc nhất định. Vui và bổ ích, dễ học và dễ chơi trong thành phố, ngoài nông thôn, trên chuyến du lịch, nó được tạo ra để mang đến kiến thức khoa học, giống mọi trò chơi kỳ thú và mới lạ của giáo sư N. CLAUS (của SIAM).

Chúng tôi trao giải thưởng 1000 franc, 100 nghìn franc, một triệu franc, và nhiều hơn, cho ai hoàn thành, bằng việc dùng tay di chuyển Tháp Hà Nội với 64 đĩa, theo qui tắc của trò chơi. Chúng tôi nói ngay là cần số lần di chuyển là 18 446 744 073 709 551 615, nhiều hơn năm tỷ thế kỷ!

# LA TOUR D'HANOÏ

VERITABLE CASSE-TÊTE ANNAMITE

JEU RAPPORTÉ DU TONKIN

PAR LE PROFESSEUR N. CLAUS (DE SIAM)

Mandarin du Collège Li-Sou-Sien!



Ce jeu inédit a été trouvé, pour la première fois, dans les écrits de l'illustre Mandarin FER-FER-TAM-TAM, qui seront publiés, plus ou moins prochainement, suivant les ordres du Gouvernement chinois.

La **TOUR D'HANOÏ** se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, que nous avons représentés par huit pions en bois, percés à leur centre. Au Japon, en Chine, au Tonkin, on les fait en porcelaine.

Le jeu consiste à démolir la tour, étage par étage, et à la reconstruire dans un lieu voisin conformément aux règles indiquées.

Amusant et instructif, facile à apprendre et à jouer, à la ville, à la campagne, en voyage, il a pour but la vulgarisation des sciences, comme tous les autres jeux curieux et inédits du professeur N. CLAUS (DE SIAM).

Nous pourrions offrir une prime de dix mille francs, de cent mille francs, d'un million de francs, et plus encore, à celui qui réaliserait, à la main, le transport de la Tour d'Hanoï, à soixante-quatre étages, conformément aux règles du jeu. Nous dirons, tout de suite, qu'il faudrait exécuter successivement le nombre de déplacements

18 446 744 073 709 551 615,

ce qui exigerait plus de cinq milliards de siècles!

D'après une vieille légende indienne, les brahmes se suicident depuis bien longtemps, sur les marches de l'autel, dans le Temple de Bénarès, pour exécuter le déplacement de la *Tour Sacrée*, de Brahma, aux soixante quatre étages en or fin, garnis de diamants de Golconde. Quand tout sera fini, la Tour et les brahmes tomberont, et ce sera la fin du monde!

PARIS, PÉKIN, YÉDO et SAÏGON

Chez les libraires et marchands de nouveautés.

1883

Tous droits réservés.



Theo một truyền thuyết Ấn Độ, những người dân của thành Brahma đã tiếp nối nhau trong một thời gian dài để thay đổi Đền Bernares, di chuyển 64 đĩa vàng của Tòa tháp Brahma. Khi công việc hoàn thành, Tòa tháp và thành Brahma sẽ đổ, và lúc đó là thời điểm kết thúc của vũ trụ!

## PARIS, BẮC KINH, TOKYO và SÀI GÒN

Trong các hiệu sách và tiểu thuyết

1883

Bản quyền đã giữ.

Dưới đây là tờ hướng dẫn thứ hai *trò chơi Tháp Hà Nội* được sản xuất lần đầu tại Paris năm 1883 và bản dịch:

### **Luật chơi và cách chơi trò chơi THÁP HÀ NỘI**

Đế đặt nằm ngang; các cọc thẳng đứng. Các đĩa đặt theo thứ tự từ lớn đến nhỏ từ thấp lên cao, tạo nên một tòa tháp. Trò chơi đòi hỏi di chuyển các đĩa, bằng cách đặt chúng vào cọc bên cạnh, mỗi lần chuyển một đĩa, theo luật sau.

I. Sau mỗi lần chuyển, các đĩa đều nằm trên một, hai, hoặc ba cọc, theo thứ tự từ lớn đến nhỏ, từ thấp đến cao.

II. Đĩa trên cùng của một trong ba cọc được đặt vào cọc trống.

III. Đĩa trên cùng của một trong ba cọc đĩa được đặt lên một trong hai cọc khác, nếu đĩa này nhỏ hơn các đĩa của cọc đó.

Trò chơi có thể dễ dàng tự khám phá, bằng việc giải quyết dần từ 3, 4, và 5 đĩa.

Trò chơi luôn giải được và đòi hỏi thời gian chơi lâu khoảng gấp đôi mỗi khi cho thêm một đĩa vào tòa tháp. Bất kì ai giải được cho tám đĩa, ví dụ, chuyển các đĩa từ cọc 1 sang cọc 2, cũng sẽ biết cách giải cho chín đĩa. Chỉ cần chuyển tám đĩa sang cọc 3, rồi chuyển đĩa thứ chín sang cọc 2, và mang tám đĩa từ cọc 3 về cọc 2. Bây giờ, khi thêm một đĩa vào trò chơi, tổng số di chuyển tăng gấp đôi, cộng với một, so với trước.

