

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ THU TRANG

MỘT SỐ CÔNG THỨC TRUY HỒI
TRONG BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI TỔNG QUÁT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2015

MỤC LỤC

	Trang
Mục lục	1
Lời nói đầu	2
Chương 1 BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI TỔNG QUÁT	4
1.1 Lịch sử bài toán Tháp Hà Nội	4
1.1.1 Truyền thuyết.....	4
1.1.2 Lịch sử.....	4
1.2 Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.....	7
1.2.1 Bài toán Tháp Hà Nội cổ điển.....	7
1.2.2 Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.....	9
Chương 2 MỘT SỐ CÔNG THỨC TRUY HỒI TRONG BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI DỰA TRÊN PHÁT BIỂU QUI HOẠCH ĐỘNG	17
2.1 Công thức qui hoạch động trong bài toán Tháp Hà Nội	17
2.2 Công thức truy hồi trong bài toán Tháp Hà Nội với 4 cọc	30
2.3 Công thức truy hồi trong bài toán Tháp Hà Nội tổng quát.....	39
Kết luận	54
Tài liệu tham khảo	55

LỜI NÓI ĐẦU

Tháp Hà Nội là một từ tiếng Việt được biết đến nhiều trên thế giới, bởi vì nó gắn liền với Trò chơi (hoặc Bài toán) Tháp Hà Nội. Bài toán này được giới thiệu và phổ biến rộng rãi ở Paris từ năm 1883 bởi nhà toán học Edouard Lucas. Mặc dù trong khoảng 10 năm (từ năm 1883 đến 1891), trong các báo và sách, E. Lucas đã chỉ ra sự thú vị và quan trọng của bài toán này cũng như mối quan hệ của nó với các lĩnh vực khác (Dãy truy hồi, lý thuyết đồ thị, hệ đếm cơ số 2, trò chơi tháo vòng Trung Hoa,...), bài toán Tháp Hà Nội vẫn thường được coi là một trò chơi toán học nhiều hơn là một bài toán có nội dung toán học.

Với sự bùng nổ của công nghệ thông tin, bài toán Tháp Hà Nội được quan tâm trở lại như là một bài toán thú vị của Toán-Tin học vào những năm 1970. Bài toán Tháp Hà Nội được đưa vào hầu hết các giáo trình tin học như một ví dụ điển hình về thuật giải đệ quy, lập trình căn bản và độ phức tạp tính toán.

Trò chơi Tháp Hà Nội không chỉ thú vị ở chỗ nó mang tên Hà Nội, thủ đô của Việt Nam. Bài toán Tháp Hà Nội hấp dẫn các nhà nghiên cứu Toán học và Tin học bởi nó liên quan đến nhiều vấn đề của Toán-Tin học như giải thuật đệ quy, hệ đếm và mã Gray, tam giác Pascal, thảm Sierpinski và Fractal, dãy Stern, lý thuyết đồ thị và chu trình Hamilton, ô tô-mát hữu hạn, độ phức tạp tính toán,... Bài toán Tháp Hà Nội gợi ý cho nhiều nghiên cứu mới trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Hiện nay bài toán này đang được nghiên cứu và phát triển bởi rất nhiều nhà toán học và khoa học máy tính, các chuyên gia giáo dục và y học.

Một trong những bài toán tổng quát trực tiếp và quan trọng nhất của bài toán Tháp Hà Nội là *bài toán Tháp Hà Nội với nhiều cọc*. Để nghiên cứu bài toán này, các nhà toán học đã đưa ra các thuật toán, chứng minh các công thức truy hồi và áp dụng

nhiều phương pháp, trong đó có công thức qui hoạch động, để chứng minh hoặc đánh giá thuật toán tối ưu.

Luận văn *Một số công thức truy hồi trong bài toán Tháp Hà Nội tổng quát* có mục đích trình bày tổng quan về bài toán Tháp Hà Nội với nhiều cọc (bài toán Tháp Hà Nội tổng quát). Luận văn cũng trình bày chứng minh một số công thức truy hồi tính số lần chuyển tối ưu trong trò chơi Tháp Hà Nội tổng quát. Đặc biệt, luận văn quan tâm tới công thức qui hoạch động giải bài toán Tháp Hà Nội.

Luận văn gồm Phần mở đầu, hai Chương và Tài liệu tham khảo.

Chương 1 *Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát*

Chương 1 giới thiệu tổng quan về bài toán tháp Tháp Hà Nội tổng quát.

Chương 2 *Một số công thức truy hồi trong trò chơi Tháp Hà Nội tổng quát*

Chương 2 trình bày cách tính số lần chuyển tối ưu thông qua việc chứng minh một số công thức truy hồi.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Tạ Duy Phương, Viện Toán học. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đối với Thầy.

Em xin cảm ơn các Thầy Cô của Đại học Thái Nguyên và Viện Toán học đã tận tình giảng dạy em trong suốt quá trình học cao học.

Tôi xin cảm ơn khoa Toán-Tin, trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên, trường Trung học phổ thông Hòn Gai đã quan tâm giúp đỡ, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện kế hoạch học tập của mình.

Xin được cảm ơn người thân, đồng nghiệp, bạn bè đã cổ vũ động viên tôi trong suốt quá trình học cao học và làm luận văn.

Thái Nguyên, 10.4.2015

Vũ Thu Trang

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI TỔNG QUÁT

1.1 Lịch sử bài toán tháp Hà Nội

1.1.1 Truyền thuyết

Éduard Lucas, tác giả của trò chơi Tháp Hà Nội, đã viết như sau: Dưới vòm của tòa tháp thờ thần Brahma (thần sáng tạo) trong thành Bernares (Ấn độ), tại vị trí được coi là trung tâm thế giới, khi bắt đầu sáng tạo vũ trụ, thần Brahma đã đặt 64 chiếc đĩa bằng vàng ròng có khoét lỗ ở giữa trên một trong ba chiếc cọc kim cương. Các đĩa này có đường kính nhỏ dần từ dưới lên trên và tạo thành một hình nón. Các nhà tu hành trong tòa tháp liên tục suốt ngày đêm, không mệt mỏi, chuyển 64 đĩa từ cọc đầu tiên sang cọc thứ ba của tòa tháp. Khi di chuyển các đĩa phải tuân theo hai qui tắc:

- 1) Mỗi lần chỉ được chuyển một đĩa trên cùng của một cọc nào đó.
- 2) Đĩa trên cùng được chuyển từ một cọc sang một trong hai cọc khác. Đĩa lớn không được đặt lên trên đĩa nhỏ vì nó có tính dễ vỡ.

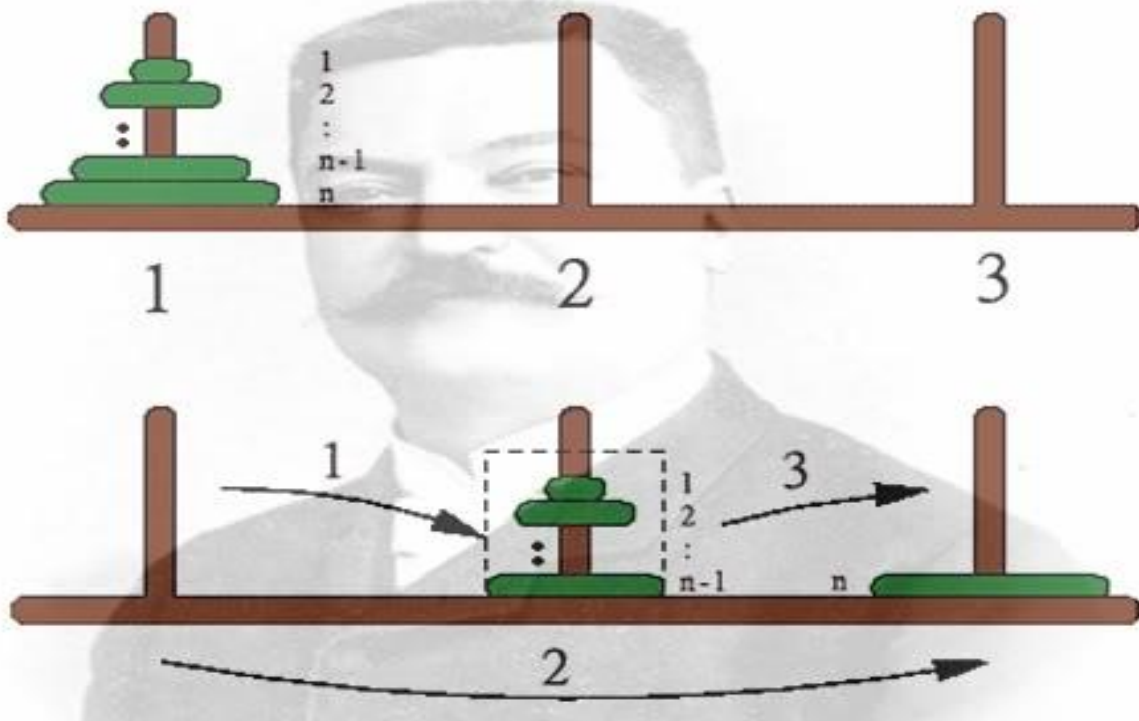
Công việc hoàn thành thì tòa tháp sẽ đổ, và lúc đó cũng là thời điểm kết thúc của vũ trụ với một tiếng nổ khủng khiếp!

Không rõ truyền thuyết này đúng tới đâu nhưng Lucas đã chỉ ra, các nhà tu hành cần 18.446.744.073.709.551.615 lần di chuyển mới có thể hoàn thành công việc. Nếu họ làm cả ngày lẫn đêm, mỗi lần chuyển đĩa mất 1 giây thì phải mất tới 580 tỷ năm mới có thể hoàn thành công việc này!

1.1.2 Lịch sử

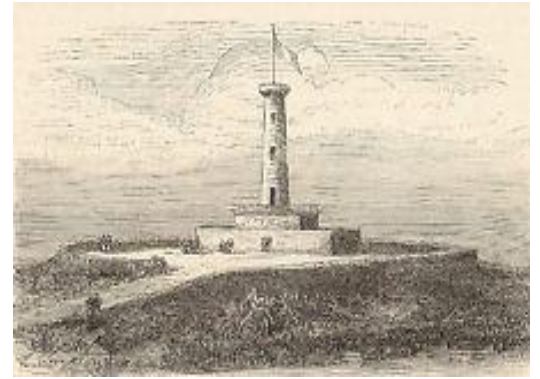
Trò chơi Tháp Hà Nội được Édouard Lucas (1842-1891) phổ biến ở Paris năm 1883 dưới ả danh (under the nickname) là giáo sư N. Claus. Trò chơi này đã được các

nhà toán-tin học quan tâm nghiên cứu, và trở thành ví dụ về thuật giải đệ quy kinh điển trong dạy học và trong tin học (solving problem, lập trình cơ bản, giải thuật đệ quy, độ phức tạp tính toán,...). Ngoài ra bài toán Tháp Hà Nội còn được ứng dụng cả trong nghiên cứu tâm lý và phương pháp giảng dạy về cách giải quyết vấn đề (problem solving). Tháp Luân Đôn là một biến thể khác, dùng trong chẩn đoán và điều trị thần kinh tâm lý đối với các chức năng thực hành. Có lẽ đây là điều mà ngay chính tác giả cũng khó có thể hình dung ra mức phổ biến đến vậy của trò chơi, cả trong nghiên cứu thực tiễn lẫn trong giải trí.



Trên bìa của hộp đựng trò chơi sản xuất năm 1883 và trong cuốn sách *L'Arithmétique Amusante* (Số học vui), xuất bản tại Paris năm 1895 (sau khi Ông mất), chính Édouard Lucas đã viết ([21], trang 179): “...la Tour d’Hanoi, véritable casse-tête annamite...” (Tháp Hà Nội, một trò chơi trí tuệ của người Annam), nhưng tại sao Ông lại gọi trò chơi này là *trò chơi Tháp Hà Nội* và tại sao lại là *trò chơi trí tuệ của người Annam* thì chưa có câu trả lời thật rõ ràng.

Một giả thuyết nữa là Cột cờ Hà Nội đã gợi ý cho E. Lucas đặt tên trò chơi của mình là trò chơi Tháp Hà Nội: “The Flag Tower of Hanoi may have served as the inspiration for the name”. Cột cờ Hà Nội có đáy gồm ba khối vuông xây chồng lên nhau. Cột cờ Hà Nội xây năm 1805-1812, hơn 70 năm trước khi trò chơi tháp Hà Nội được phổ biến.



Cột cờ Hà Nội thế kỉ 19

Năm 1882 Pháp tấn công đánh chiếm thành Hà Nội lần thứ hai. Đề tài Hà Nội và Đông Dương là thời sự và tràn ngập trên các báo ở Paris vào những năm 1882-1883 (xem [12], trang 6). Phải chăng điều này đã gợi ý E. Lucas đặt tên cho trò chơi của mình là trò chơi *Tháp Hà Nội*?

Trên tờ bìa của hộp đựng trò chơi Tháp Hà Nội được bán lần đầu tại Paris năm 1883 có hình tháp 10 tầng, cây tre, người Annam và dòng chữ: La Tour d'Hanoi, Veritable casse-tête Annamite Jeu, rapporté du Tonkin par le professeur N. Claus (de Siam) du college Mandarin Li-Sou-Stian - Tháp Hà Nội, Trò chơi trí tuệ của người Annam, được mang về từ Bắc Kỳ bởi giáo sư N. Claus (ở Siam), trường trung học Li-Sou-Stian. (N. Claus de Siam là đảo từ của E. Lucas d'Amiens, Amiens là quê của E. Lucas. Li-Sou-Sian là đảo từ của Sant Louis, trường trung học ở Paris, nơi Ông dạy học vào những năm đó).

Phản dịch nghĩa của tờ hướng dẫn thứ nhất giới thiệu trò chơi Tháp Hà Nội được tóm tắt như sau:

Trò chơi này lần đầu được tìm thấy trong cuốn sách có minh họa tiếng Quan thoại FER-FER-TAM-TAM, sẽ được xuất bản trong tương lai gần, bởi chính phủ bảo hộ. Tháp Hà Nội có các đĩa, nhỏ dần, có số lượng thay đổi, mà chúng tôi làm bằng gỗ,

có lỗ ở giữa. Ở Nhật Bản, Trung Quốc, và ở Đông Kinh (Tonkin-Bắc Kỳ), chúng được làm bằng sứ.

Trò chơi có mục đích là dỡ bỏ từng đĩa, và đặt vào cọc bên cạnh, theo các quy tắc nhất định. Vui và bổ ích, dễ học và dễ chơi trong thành phố, ngoài nông thôn, trên chuyến du lịch, nó được tạo ra để mang đến kiến thức khoa học, giống mọi trò chơi kỳ thú và mới lạ của giáo sư N. CLAUS (của SIAM).

Trò chơi Tháp Hà Nội vừa được phổ biến tại Paris năm 1883 đã được đón nhận rộng rãi vì sự đơn giản và hấp dẫn của nó. E. Lucas đã tỏ ra rất khôn khéo khi Ông cho sản xuất trò chơi Tháp Hà Nội với 8 đĩa, số đĩa vừa đủ để trò chơi không quá đơn giản (để chuyển hết 8 đĩa từ cọc nguồn sang cọc đích, không nhầm lẫn, cần 255 bước), cũng như không quá phức tạp (như trong trường hợp 64 đĩa, phải mất 5 tỉ năm).

Ngày nay, trên mạng Internet có rất nhiều chương trình viết trên nhiều ngôn ngữ khác nhau và rất nhiều phần mềm hiển thị hướng dẫn trò chơi Tháp Hà Nội (với ba cọc hoặc nhiều hơn, trò chơi Tháp Hà Nội cải biên,...). Tại Việt Nam đã có rất nhiều lập trình viên, những sinh viên đại học đưa ra các phiên bản ứng dụng của trò chơi, giúp nó trở thành một trò chơi điện tử hấp dẫn và rất sinh động. Một số hãng điện thoại nước ngoài đã đưa trò chơi tháp Hà Nội vào điện thoại di động.

Có thể tìm mua trò chơi Tháp Hà Nội làm bằng gỗ hoặc sứ tại các cửa hàng Việt Nam hoặc nước ngoài để giải trí.

1.2 Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát

1.2.1 Bài toán Tháp Hà Nội cổ điển

Bài toán Tháp Hà Nội có nội dung như sau: có ba cọc A, B, C và n đĩa có bán kính tăng dần (mỗi đĩa có một lỗ ở giữa để đặt vào cọc), ban đầu các đĩa nằm trên cọc A tạo thành một tòa tháp (đĩa to nhất nằm dưới cùng, đĩa nhỏ hơn nằm bên trên và cứ

thể đĩa nhỏ nhất nằm trên cùng). Mỗi lần di chuyển là một lần dịch chuyển đĩa trên cùng từ một cọc bất kỳ sang một cọc khác sao cho không có đĩa nào được đặt trên đĩa nhỏ hơn nó. Bài toán là dịch chuyển tòa tháp có n đĩa trên cọc A sang cọc C (theo trật tự đĩa ban đầu) với số lần di chuyển là tối thiểu.

Ta thực hiện chuyển đĩa số 1 từ cọc A sang cọc C; chuyển đĩa số 2 sang cọc B; chuyển đĩa số 1 từ cọc C sang cọc B. Khi ấy đĩa số 1 nằm trên đĩa số 2. Vậy ta hiện đã có hai đĩa nằm trên cọc B, cọc C hiện thời trống. Chuyển đĩa số 3 từ cọc A sang cọc C. Lặp lại ba bước trên để giải bài toán cho hai đĩa: chuyển đĩa số 1 và đĩa số 2 cho nằm lên trên đĩa số 3 trên cọc C.

Tiếp tục làm như vậy cho bốn, năm, ... đĩa. Mỗi lần dựng xong tháp từ đĩa thứ l đến đĩa thứ nhất (trên cọc B hoặc cọc C, một trong hai cọc đó trống), ta chuyển đĩa thứ $l+1$ từ cọc A sang cọc trống (cọc C hoặc cọc B), rồi lại di chuyển tháp đã dựng từ cọc B (hoặc cọc C) lên đĩa thứ $l+1$ để được tháp với $l+1$ đĩa.

Như vậy, khi đã xây dựng xong tháp thứ l thì ta cũng dễ dàng xây dựng được tháp thứ $l+1$, sau khi chuyển đĩa thứ $l+1$ sang cọc trống.

Phương pháp trên được gọi là *thuật giải đệ qui*: Để tiến hành giải bài toán với $n+1$ đĩa, ta áp dụng lại thuật giải bài toán với n đĩa. Toàn bộ quá trình là một số hữu hạn các bước, vì vậy đến một lúc nào đó thuật giải sẽ được áp dụng cho $n=1$. Bước này chỉ đơn giản là chuyển một đĩa duy nhất từ cọc A sang cọc C.

Kí hiệu $L(n)$ là số lần chuyển đĩa tối ưu trong bài toán tháp Hà Nội với n đĩa và ba cọc. Khi ấy, để chuyển n đĩa từ cọc A sang cọc C, trước tiên ta phải chuyển $n-1$ đĩa trên cùng (các đĩa nhỏ) từ cọc A sang cọc B, sau đó chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng, lại chuyển $n-1$ đĩa từ cọc B sang cọc C. Ta có:

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L(n) = L(n-1) + L(1) + L(n-1) = 2L(n-1) + 1.$$

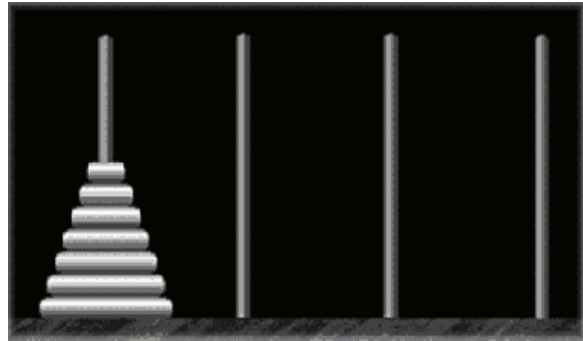
Theo qui nạp, ta có $L(n+1) = 2L_n + 1 = 2 \cdot 2^n - 1 + 1 = 2^{n+1} - 1$.

Vậy công thức $L(n) = 2^n - 1$ được chứng minh với mọi n . Công thức trên cho thấy, thuật toán đệ qui giải bài toán Tháp Hà Nội là thuật toán có *thời gian mũ*.

1.2.2 Bài toán Tháp Hà Nội tổng quát

Một mở rộng tự nhiên của bài toán Tháp Hà Nội cổ điển là *Bài toán Tháp Hà Nội với bốn (hoặc nhiều) cọc*. Chính tác giả của bài toán Tháp Hà Nội, E. Lucas cũng là người đầu tiên xét bài toán với nhiều cọc vào năm 1889 (xem [12], trang 211).

Năm 1902-1903 Henry Ernest Dudeney đã viết hai bài báo về bài toán Tháp Hà Nội với bốn cọc. Trong hai trang đầu tiên của cuốn sách nổi tiếng *The Canterbury Puzzles and Other Curious Problems* xuất bản tại London năm 1907 và tại New York năm 1908 (xem [9] và bìa cuốn sách trong hình bên), Ông đã viết về bài toán này trò chơi tháp Hà Nội với bốn cọc (dưới dạng các quân cờ) và số đĩa là 8, 10 hoặc 21 và gọi là *The Reve's puzzle*-câu đố của Reve).



Bài toán Tháp Hà Nội với bốn cọc

