ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DƯƠNG KIỀU

ĐỊNH LÝ ROLLE VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DƯƠNG KIỀU

ĐỊNH LÝ ROLLE VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - 2010

Mục lục

Mở đầu

Định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle (Định lý Lagrange, Định lý Cauchy, Định lý Rolle trên một khoảng không bị chặn) là các định lý quan trọng về giá trị trung bình trong chương trình giải tích cổ điển. Ứng dụng của các định lý này trong chương trình toán Trung học phổ thông rất đa dạng và phong phú, đặc biệt là các dạng toán về giải phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình trên một khoảng, chứng minh bất đẳng thức, xét cực trị của hàm số... Tuy nhiên, trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh phổ thông thì các ứng dụng này của định lý Rolle chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Với suy nghĩ và theo ý tưởng đó, mục tiêu chính của bản luận văn này là nhằm cung cấp thêm cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi, có năng khiếu và yêu thích môn toán một tài liệu, ngoài những kiến thức cơ bản còn có thêm một hệ thống các bài tập nâng cao, qua đó sẽ thấy rõ hơn các dạng toán ứng dụng rất phong phú của Định lý Rolle, Định lý Lagrange và một số định lý mở rộng khác. Đặc biệt, luận văn cũng định hướng cách giải và cách vận dụng các định lý đã biết để tìm tòi những lời giải hay, độc đáo đặc thù cho từng dạng toán cụ thể, từ đó hình thành ý thức sáng tạo những bài toán mới. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục hoàn thiện trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

Luận văn ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo gồm bốn chương.

Chương 1. Định lý Rolle và một số mở rộng.

Nội dung chương này nhằm trình bày một cách cơ bản nhất các định lý về giá trị trung bình cùng một số hệ quả quan trọng. Đây là phần lý thuyết cơ sở để vận dụng cho các bài toán ứng dụng ở những chương sau.

Chương 2. Khảo sát tính chất cơ bản của hàm số.

Chương này trình bày một số ứng dụng trực tiếp của định lý Rolle và định lý Lagrange trong việc khảo sát hai tính chất rất cơ bản và quan trọng của hàm số trong chương trình toán THPT, đó là tính đồng biến, nghịch biến và tính chất lồi, lõm của hàm số khả vi bậc hai.

Chương 3. Một số ứng dụng định lý Rolle trong đại số.

Đây là nội dung trọng tâm của luận văn. Chúng tôi nêu ứng dụng của Định lý Rolle và các định lý mở rộng trong các bài toán giải phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình, chứng minh bất đẳng thức, sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm. Các bài tập minh họa được lựa chọn từ đề thi của các kì thi học sinh giỏi Quốc gia, các kì thi Olympic khu vực và Quốc tế, một số bài tập do tác giả tự sáng tác. Đối với mỗi dạng bài tập đều nêu phương pháp giải cụ thể, có đưa ra những bài toán với lời giải độc đáo đầy tính sáng tạo và bất ngờ.

Chương 4. Bài tập bổ sung.

Chương này giới thiệu một số bài toán tiêu biểu đã được sắp xếp và lựa chọn kỹ lưỡng. Mỗi bài đều có hướng dẫn cách giải nhằm vận dụng những kiến thức thu được từ ba chương trước để nâng cao kỹ năng lập luận và kỹ năng tính toán cụ thể.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu, tác giả xin được tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người Thầy rất nghiêm khắc và tận tâm trong công việc, đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học, Khoa Toán-Tin của trường Đại học Khoa

học - Đại học Thái Nguyên, cùng quý thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học Toán K2.

Tác giả xin chân thành cảm ơn UBND Tỉnh, Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Cao Bằng, Ban giám hiệu và tập thể cán bộ giáo viên Trường THPT Dân tộc Nội trú Tỉnh Cao Bằng đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội được học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin được cảm ơn sự quan tâm, giúp đỡ nhiệt tình của các bạn học viên Cao học Toán K1, K2, K3 trường ĐHKH - ĐHTN đối với tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc trong suốt khóa học, cũng như rất cẩn thận trong khâu chế bản LaTex. Tuy nhiên do còn hạn chế về thời gian, khả năng và hoàn cảnh gia đình nên trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2010.
Người thực hiện
Nguyễn Thị Dương Kiều

Chương 1

Định lý Rolle và một số mở rộng

Trong chương này chúng tôi giới thiệu nội dung Định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle (xem [3]-[4]-[8]-[10]-[11]). Một số hệ quả quan trọng cũng được trình bày ở đây để thuận lợi cho việc vận dụng giải các bài toán được trình bày trong hai chương tiếp theo.

1.1 Định lý Rolle

Cơ sở của định lý Rolle dựa vào hai định lý cơ bản nhất của Weierstrass đối với hàm liên tục khẳng định rằng khi f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó phải đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó và định lý Fermat về điểm cực trị của hàm khả vi khẳng định rằng nếu hàm khả vi $g(x)$ trong (a, b) đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại một điểm trong khoảng đó thì đạo hàm tại điểm đó bằng 0.

Định lý 1.1 (Định lý Rolle). *Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên theo định lý Weierstrass hàm f phải đạt giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trên đoạn $[a; b]$, tức là tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in (a;b)$ sao cho

$$f(x_1) = \min_{[a;b]} f(x) = m, f(x_2) = \max_{[a;b]} f(x) = M.$$

Có hai khả năng:

a) $m = M$. Khi ấy $f(x) = const$ trên đoạn $[a;b]$, do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a;b)$ và c là điểm bất kì trên khoảng đó.

b) $m < M$. Khi đó vì điều kiện $f(a) = f(b)$ nên ít nhất một trong hai điểm x_1, x_2 sẽ không trùng với các đầu mút của đoạn $[a;b]$. Giả sử $x_1 \in (a;b)$, theo định lý Fermat thì đạo hàm bằng 0 tại điểm này.

Định lý đã được chứng minh xong.

Nhận xét 1.1.

1) Định lý Rolle nói chung sẽ không còn đúng nếu trong khoảng $(a;b)$ có điểm c mà tại đó $f'(c)$ không tồn tại. Chẳng hạn, xét hàm $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}, x \in [-1;1]$. Dễ thấy $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện: $f(x)$ liên tục trên $(-1;1)$ và $f(-1) = f(1)$. Ta xét đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, rõ ràng tại $x_0 = 0 \in (-1;1)$ đạo hàm không tồn tại, nên hàm số không thoả mãn đủ các điều kiện của định lý Rolle.

2) Điều kiện liên tục trên đoạn $[a;b]$ đối với hàm $f(x)$ cũng không thể thay bởi điều kiện $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a;b)$. Chẳng hạn, xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu} \quad x = 0, \\ x, & \text{nếu} \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Ở đây $x = 0$ là điểm gián đoạn. Khi đó, rõ ràng không tồn tại $x_0 \in (0,1)$ để $f'(x_0) = 0$.

3) Ý nghĩa hình học: Nếu các điều kiện của định lý Rolle được thoả mãn thì trên đồ thị của hàm số $y = f(x), \forall x \in [a;b]$ tồn tại điểm $M(c; f(c)), c \in (a;b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với trục hoành Ox.

Hệ quả 1.1. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và phương trình $f(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n-1$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$. (Phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n-k$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$, với $k = 1, 2, \ldots, n$).

Chứng minh. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ đã được sắp thứ tự $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Khi đó áp dụng địng lý Rolle cho $n-1$ đoạn $[x_1; x_2], [x_2; x_3], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n-1$ nghiệm thuộc $n-1$ khoảng $(x_1; x_2), (x_2; x_3), \ldots, (x_{n-1}; x_n)$. Gọi $n-1$ nghiệm đó là $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ thì ta có

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \cdots = f'(\xi_{n-1}) = 0.$$

Tiếp tục áp dụng định lý Rolle cho $n-2$ khoảng $(\xi_1; \xi_2), \ldots, (\xi_{n-2}; \xi_{n-1})$ thì phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất $n-2$ nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Tiếp tục lý luận trên, sau k bước phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n-k$ nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$.

Hệ quả 1.2. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó, nếu phương trình $f'(x) = 0$ có không quá $n-1$ nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá n nghiệm phân biệt trên khoảng đó.

Chứng minh. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn n nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$, chẳng hạn là $n+1$ nghiệm, thế thì theo hệ quả 1.1 phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$. Điều này trái với giả thiết. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có không quá n nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Tiếp theo, ta xét một mở rộng của định lý Rolle.

Hệ quả 1.3. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các tính chất sau đây:

i) $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp n $(n \geq 1)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

ii) $f(x)$ có đạo hàm cấp $n+1$ trong khoảng $(a;b)$.

iii) $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f(b) = 0.$

Khi đó tồn tại dãy điểm $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$sao cho

$$f^{(k)}(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $f(a) = f(b) = 0$, theo định lý Rolle tồn tại $b_1 \in (a;b)$ sao cho $f'(b_1) = 0$, kết hợp với điều kiện $f'(a) = 0$, suy ra tồn tại $b_2 \in (a;b_1) \subset (a;b)$ sao cho $f''(b_2) = 0$. Lại kết hợp với điều kiện $f''(a) = 0$ và tiếp tục áp dụng định lý Rolle ta có $f'''(b_3) = 0$ với $b_3 \in (a;b_2) \subset (a;b)$.

Tiếp tục như vậy, đến bước thứ n, tồn tại $b_n \in (a;b_{n-1}) \subset (a;b)$ sao cho $f^{(n)}(b_n) = 0$, kết hợp với điều kiện $f^{(n)}(a) = 0$, suy ra tồn tại $b_{n+1} \in (a;b_n) \subset (a;b)$ sao cho $f^{(n+1)}(b_{n+1}) = 0$.

Như vậy tồn tại dãy điểm phân biệt $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ trong khoảng $(a;b)$ sao cho

$$f^{(k)}(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Chính nhờ những hệ quả này mà định lý Rolle trở thành một công cụ rất mạnh để giải toán, đặc biệt là đối với dạng toán về giải phương trình và kiểm chứng số nghiệm của phương trình trong một khoảng nào đó. Các ứng dụng này sẽ được trình bày chi tiết trong các chương sau.

1.2 Định lý Lagrange và Định lý Cauchy

Tiếp theo ta xét một số định lý liên quan mật thiết với định lý Rolle.

Định lý 1.2 (Định lý Lagrange)**.** *Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng $(a;b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta xét hàm phụ

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{1.2}$$