ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VƯƠNG MINH HẢI

PHƯƠNG PHÁP LẶP GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN J-ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN - 2015

Mục lục

BẢNG KÝ HIỆU

X	không gian Banach thực
X^*	không gian liên hợp của X
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền giá trị của toán tử A
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của toán tử T
H	không gian Hilbert
C	tập con lồi đóng của H
I	ánh xạ đơn vị
P_C	phép chiếu mêtric H lên tập con lồi đóng C của H
$x_n \to x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới x
$x_n \rightharpoonup x$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x

MỞ ĐẦU

Cho X là một không gian Banach thực và $J : X \to 2^{X^*}$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X, ở đây X^* là ký hiệu không gian liên hợp của X. Cho $\{x_n\}$ là một dãy các phần tử trong X. Ký hiệu $x_n \to x$ (tương ứng $x_n \rightharpoonup x$) chỉ sự hội tụ mạnh (tương ứng hội tụ yếu) của dãy $\{x_n\}$ tới $x \in X$. Cho $F : X \to X$ là một ánh xạ phi tuyến. Ký hiệu $C = \text{Fix}(T)$ là tập điểm bất động của ánh xạ không giãn $T : X \to X$, nghĩa là $\text{Fix}(T) = \{x \in X : Tx = x\}$. Trong đề tài này chúng tôi xét bài toán bất đẳng thức biến phân $\text{VI}^*(F, C)$ trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach với ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J đơn trị như sau:

$$\text{Tìm } u^* \in C \text{ sao cho :} \quad \langle F(u^*), J(u^* - v)\rangle \leq 0, \quad \forall v \in C. \tag{0.1}$$

Lý thuyết bất đẳng thức biến phân đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn phương trình vi phân, điều khiển tối ưu, quy hoạch toán học, cơ học, tài chính, ...

Mục đích của luận văn nhằm trình bày phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn (0.1) với toán tử J-đơn điệu trong bài báo của L.-C. Ceng và các cộng sự [6] công bố năm 2008.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 với tiêu đề "Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach" nhằm trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian Banach, ánh xạ không giãn, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc; Bài toán bất đẳng thức biến phân và phương pháp chiếu gradient giải bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[9].

Chương 2 với tiêu đề "Phương pháp lặp giải bất đẳng thức biến phân J-đơn điệu" nhằm giới thiệu phương pháp lặp Mann, phương pháp lai đường dốc nhất, phương pháp đường dốc - kiểu Mann giải bất đẳng thức biến phân J-đơn điệu. Nội dung của chương này được viết trên cơ sở bài báo [6].

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo Tiến sĩ Nguyễn Thị Thu Thủy. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô.

Trong quá trình học tập và làm luận văn, từ bài giảng của các Giáo sư, Phó Giáo sư công tác tại Viện Toán học, Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, các Thầy Cô trong Đại học Thái Nguyên, tác giả đã trau dồi thêm rất nhiều kiến thức phục vụ cho việc nghiên cứu và công tác của bản thân. Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô.

Cuối cùng tác giả xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, lãnh đạo đơn vị công tác và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả khi học tập và nghiên cứu.

Tác giả

Vương Minh Hải

Chương 1

Bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian Banach, không gian Hilbert, ánh xạ không giãn, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, ánh xạ giả co, nguyên lý ánh xạ co Banach. Đồng thời giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert và không gian Banach. Các kiến thức của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1]-[9].

1.1 Không gian Banach. Ánh xạ J-đơn điệu

1.1.1 Không gian Banach. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho tập hợp X. Ánh xạ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ được gọi là một *mêtric* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X; \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X;$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$

Tập X cùng với mêtric d xác định như trên được gọi là *không gian mêtric* và được kí hiệu (X,d).

Định nghĩa 1.2. Không gian mêtric (X,d) được gọi là *không gian đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy trong X đều hội tụ.

Định nghĩa 1.3. Cho không gian tuyến tính X trên trường số thực, ánh xạ $||.|| : X \to \mathbb{R}$ được gọi là *chuẩn* trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $||x|| \geq 0 \quad \forall x \in X; \quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(ii) $||kx|| = |k|.||x|| \quad \forall x \in X,\ \forall k \in \mathbb{R};$

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng với chuẩn $||.||$ xác định như trên được gọi là *không gian định chuẩn* và được ký hiệu $(X, ||.||)$.

Nhận xét 1.1. Cho không gian định chuẩn $(X, ||.||)$. Với mọi $x, y \in X$, đặt $d(x, y) = ||x - y||$ thì d là một mêtric trên X.

Do đó, mọi không gian định chuẩn đều là không gian mêtric với mêtric sinh bởi chuẩn xác định như trên.

Định nghĩa 1.4. Không gian định chuẩn đầy đủ được gọi là *không gian Banach.*

Ví dụ 1.1. Không gian $\mathbb{R}^n$ với chuẩn xác định bởi:

$$||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

và không gian $C_{[a,b]}$ các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ với chuẩn xác định bởi:

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}, \quad f \in C_{[a,b]}$$

là các không gian Banach.

Định nghĩa 1.5. Cho không gian tuyến tính H trên trường số thực $\mathbb{R}$, ánh xạ $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ được gọi là một *tích vô hướng* trên H nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H; \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in H;$

(iii) $\langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H,\ \forall k \in \mathbb{R};$

(iii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in H.$

Không gian tuyến tính H cùng với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ nói trên được gọi là không gian *tiền Hilbert*.

Nhận xét 1.2. Không gian tiền Hilbert H là không gian định chuẩn với chuẩn $||x|| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ với mọi $x \in H$.

Định nghĩa 1.6. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là *không gian Hilbert*.

Ví dụ 1.2. Không gian $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

và không gian $L^2_{[a,b]}$ với tích vô hướng:

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt, \quad x, y \in L^2_{[a,b]}$$

là các không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.7. Toán tử $A : X \to X^*$ được gọi là

(i) *đơn điệu nếu*

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A);$$

(ii) *η-đơn điệu mạnh* nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \geq \eta\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A);$$

(iii) *L-liên tục Lipschitz* nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$\|A(x) - A(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Nếu $0 \leq L < 1$ thì toán tử A được gọi là *toán tử co*. Nếu $L = 1$ thì toán tử A được gọi là *toán tử không giãn*.

Định nghĩa 1.8. Không gian Banach X được gọi là

(i) *không gian trơn* (hay *có chuẩn khả vi Gâteaux*) nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{t\to 0} \frac{||x + ty|| - ||x||}{t} \quad \text{với mỗi } x, y \in S_X;$$

(ii) *không gian trơn đều* (hay *có chuẩn khả vi Gâteaux đều*) nếu giới hạn trên đạt được đều với $x \in S_X$.

Ở đây, ký hiệu $S_X = \{x \in X : ||x|| = 1\}$ là *mặt cầu đơn vị* của X.

Định nghĩa 1.9. Không gian Banach X được gọi là thỏa mãn *điều kiện Opial* nếu với dãy $\{x_n\}$ bất kỳ trong X, $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$ ta có

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|, \quad \forall y \in X, \text{ với } x \neq y.$$