BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG HẠNH

HÀM PHẦN NGUYÊN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2010

MỤC LỤC

Trang

CÁC KÝ HIỆU

Trong cuốn luận văn này ta sử dụng các ký hiệu sau:

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Tập các số thực không âm được ký hiệu là $\mathbb{R}^{+}$.

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$.

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Tập các số nguyên dương được ký hiệu là $\mathbb{Z}^{+}$ hoặc $\mathbb{N}$.

LỜI NÓI ĐẦU

Do tính độc đáo của hàm phần nguyên, thí dụ, hàm phần nguyên vừa đơn giản (là hàm *hằng từng khúc*) lại vừa phức tạp (*gián đoạn* tại các điểm nguyên nên khó áp dụng các công cụ của giải tích), nhiều bài toán hay về phần nguyên đã được sử dụng làm đề thi học sinh giỏi các cấp, trong đó có rất nhiều các đề thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic quốc tế. Mặt khác, hàm phần nguyên có những ứng dụng quan trọng không chỉ trong toán học phổ thông, mà còn trong nhiều vấn đề của toán ứng dụng và công nghệ thông tin (làm tròn số, tính gần đúng,...). Phần nguyên cũng thể hiện sự kết nối giữa tính liên tục và tính rời rạc, giữa toán giải tích và toán rời rạc nên khá thú vị.

Lí thuyết và bài tập về phần nguyên rải rác đã có trong các sách và các tạp chí, thậm chí đã là những chuyên đề trong một số sách về số học (xem [3], [5], [8]). Tuy nhiên, hình như chưa có một cuốn sách nào viết đủ phong phú và tổng hợp về phần nguyên. Đó chính là lí do để tác giả chọn đề tài này làm luận văn cao học.

Luận văn *Hàm phần nguyên và ứng dụng* có mục đích trình bày các kiến thức cơ bản của hàm phần nguyên và ứng dụng của nó trong giải toán sơ cấp, cụ thể là trong số học, đại số và giải tích (toán chia hết, giải phương trình, tính chất của dãy, tính giới hạn, tính tổng của dãy, chuỗi,...chứa phần nguyên). Đồng thời luận văn cũng trình bày mối quan hệ mật thiết của phần nguyên với các dạng toán khác (dãy truy hồi, nhị thức Newton, hệ đếm,...). Đặc biệt luận văn tập hợp một khối lượng lớn các bài toán thi vô địch quốc gia và quốc tế minh họa cho lí thuyết về phần nguyên.

Luận văn gồm ba chương.

Chương 1 trình bày các định nghĩa và tính chất cơ bản của hàm phần nguyên và đồ thị của hàm phần nguyên.

Chương 2 trình bày một số dạng toán chứa phần nguyên trong số học và đại số (toán chia hết; tính toán và chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên; giải phương trình và hệ phương trình chứa phần nguyên;...).

Chương 3 trình bày một số dạng toán chứa phần nguyên trong giải tích (các tính chất như tính bị chặn, tính tuần hoàn của dãy số; tìm số hạng và tính giới hạn của dãy số, tính tổng hữu hạn của dãy số, tính tổng của chuỗi chứa phần nguyên, ...).

Nhiều ví dụ và bài toán tập hợp trong luận văn đã được đưa vào bản thảo cuốn sách của tác giả luận văn viết chung với Thầy hướng dẫn và Thạc sĩ Nguyễn Thị Bình Minh. Vì hạn chế số trang luận văn, trong mỗi chương, chúng tôi cố gắng trình bày các vấn đề lí thuyết làm cơ sở để phân loại và tổng kết các phương pháp giải từng dạng toán chứa phần nguyên. Các ví dụ minh họa phương pháp được lựa chọn mang tính chất điển hình, số lượng lớn bài tập thể hiện sự phong phú muôn hình vẻ của ứng dụng hàm phần nguyên trong giải toán và đã được giải chi tiết trong [2] nên không trình bày lại trong luận văn này.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới Thầy.

Tác giả xin chân cám ơn Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi tác giả đã hoàn thành chương trình cao học ngành toán.

Và cuối cùng, xin cám ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học cao học và viết luận văn.

Hà Nội, ngày 15 tháng 9 năm 2010

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng Hạnh

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ PHẦN NGUYÊN

§1 KHÁI NIỆM VỀ PHẦN NGUYÊN

Định nghĩa 1.1 Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên lớn nhất không vượt quá x được gọi là *phần nguyên* (integer part, integral part) hay *sàn* (floor) của x. Ta thường kí hiệu phần nguyên của x là $[x]$. Nhiều tài liệu gọi phần nguyên của x là *sàn* và kí hiệu phần nguyên của x là $\lfloor x \rfloor$, vì *sàn* có liên quan mật thiết với khái niệm *trần* $\lceil x \rceil$ của x. Hai khái niệm *trần* và *sàn* thường được sử dụng trong tin học. Trong luận văn này ta sẽ dùng cả hai kí hiệu phần nguyên (sàn) là $[x]$ và $\lfloor x \rfloor$.

Định nghĩa 1.2 Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x được gọi là *trần* của x và kí hiệu là $\lceil x \rceil$.

Định nghĩa 1.1 và Định nghĩa 1.2 tương đương với:

$$[x] = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \le x < z+1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x - z < 1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

và

$$\lceil x \rceil = z \Leftrightarrow \begin{cases} z-1 < x \le z; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le z - x < 1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hơn nữa, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ với mọi $x \notin \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.3 *Phần dư* (*phần thập phân*, *phần lẻ, giá trị phân* - fractional part, fractional value) của một số thực x, kí hiệu là $\{x\}$ được định nghĩa bởi công thức $\{x\} = x - [x]$.

Từ Định nghĩa 1.3 ta suy ra ngay, $0 \le \{x\} < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\{z\} = 0$ khi và chỉ khi z là số nguyên.

Ta biết rằng, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại số nguyên $z \in \mathbb{Z}$ sao cho $z \le x < z+1$.

Định nghĩa 1.4 Giá trị nhỏ nhất giữa hai số $x - z$ và $z + 1 - x$ được gọi là *khoảng cách* từ x đến số nguyên gần nó nhất và được kí hiệu là $]x[$.

Ta có $]x[= |x - z| \le 0,5$ với mọi x.

Định nghĩa 1.5 *Số nguyên gần một số thực* x *nhất* được kí hiệu là (x) và (x) được gọi là *số làm tròn* của x.

Khái niệm làm tròn số được sử dụng rộng rãi trong máy tính.

Để xác định, nếu có hai số nguyên cùng gần x nhất (nghĩa là khi $x = z + 0,5 = (z+1) - 0,5$ thì z và $z+1$ cùng có khoảng cách tới x bằng 0,5 ($x - z = z + 1 - x = 0,5$) thì ta qui ước chọn số lớn, tức là nếu $z \le x < z + 0,5$, thì $(x) = z$, còn nếu $z + 0,5 \le x \le z + 1$ thì $(x) = z + 1$.

§2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHẦN NGUYÊN

Từ các Định nghĩa 1.1 - Định nghĩa 1.5 ta đi đến các tính chất tuy đơn giản nhưng rất cơ bản và hay sử dụng sau đây của phần nguyên. Các tính chất này đã được chứng minh chi tiết trong [2], vì vậy dưới đây chúng tôi chỉ liệt kê mà không chứng minh.

Tính chất 2.1 Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

a) $[x] \le x < [x] + 1$ hay $x - 1 < [x] \le x$;

b) $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$ hay $x \le \lceil x \rceil < x + 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x là số nguyên.

Tính chất 2.2 $x=[x]+\{x\}$; $0\le\{x\}<1$; $x=\{x\}\Leftrightarrow 0\le x<1$.

Hệ quả 2.1 $[x+z]=z$ thì $z\in\mathbb{Z}$ và $0\le x<1$.

Tính chất 2.3 $[x+z]=[x]+z$; $\{x+z\}=\{x\}$ với mọi $z\in\mathbb{Z}$.

Đảo lại, $\{x\}=\{y\}$ thì $y=x+z$ với $z\in\mathbb{Z}$ nào đó.

Tính chất 2.4 Nếu $x\in\mathbb{Z}$ thì $[x]=x$ và $\{x\}=0$.

Ngược lại nếu $[x]=x$ hoặc $\{x\}=0$ thì $x\in\mathbb{Z}$.

Nếu $x\in\mathbb{Q}$ là số hữu tỉ nhưng không phải là số nguyên thì $\{x\}$ cũng là một số hữu tỉ thuộc khoảng $(0;1)$.

Nếu $x\in\mathbb{R}$ là số vô tỉ thì $\{x\}$ cũng là một số vô tỉ thuộc khoảng $(0;1)$.

Tính chất 2.5 Phần dư, sàn và trần có tính chất *luỹ đẳng* (idempotent), tức là khi hai lần áp dụng phép toán thì kết quả không đổi:

$$\{\{x\}\}=\{x\};\ [[x]]=[x] \text{ và } \lceil\lceil x\rceil\rceil=\lceil x\rceil \text{ với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Hơn nữa, $\{[x]\}=[\{x\}]=\{\lceil x\rceil\}=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Nhưng $\lceil\{x\}\rceil=0$ và $\lceil[x]\rceil=[\lceil x\rceil]=x$ với mọi $x\in\mathbb{Z}$;

$$\lceil\{x\}\rceil=1,\ \lceil[x]\rceil=[x]=\lceil x\rceil-1=[\lceil x\rceil]-1 \text{ với mọi } x\notin\mathbb{Z}.$$

Tính chất 2.6 Các qui tắc đổi chỗ (hoán vị), kết hợp của phép toán cộng và phép toán nhân; qui tắc kết hợp giữa phép toán nhân và phép toán cộng vẫn đúng cho phần nguyên và phần dư.

Tính chất 2.7 Phép làm tròn số (x) thông thường như đã nêu trong Định nghĩa 1.5 chính là phép lấy phần nguyên của $x+0{,}5$, tức là $(x)=[x+0{,}5]$.

Tính chất 2.8 Nếu $[x]=[y]$ thì $|x-y|<1$ hay $-1<x-y<1$.

Tính chất 2.9 Nếu $x\ge y$ thì $[x]\ge[y]$. Đảo lại, nếu $[x]>[y]$ thì $x>y$.

Tính chất 2.10

a) Cả hai số x và y là hai số nguyên khi và chỉ khi $\{x\}+\{y\}=0$.

b) Trong hai số x và y có một số nguyên và một số không phải là số nguyên thì $0<\{x\}+\{y\}<1$.

c) Hai số x và y không nguyên có tổng $x+y$ là một số nguyên khi và chỉ khi $\{x\}+\{y\}=1$.

Tính chất 2.11a Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\{x+y\} \leq \{x\}+\{y\} \leq \{x+y\}+1; \ [x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1.$$

Nhận xét 2.1 Tính chất 2.11a có thể được phát biểu dưới dạng sau.

Tính chất 2.11b $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & \text{khi } \ 0 \leq \{x\}+\{y\}<1; \\ [x]+[y]+1 & \text{khi } \ 1 \leq \{x\}+\{y\}<2.\end{cases}$

Tính chất này cũng được viết dưới dạng sau đây.

Tính chất 2.11c $[x]+[y]=\begin{cases}[x+y] & \text{khi } \ 0 \leq \{x\}+\{y\}<1; \\ [x+y]-1 & \text{khi } \ 1 \leq \{x\}+\{y\}<2.\end{cases}$

Hệ quả 2.2 $[2x] \geq 2[x]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hệ quả 2.3 $[-x]=-[x]$ và $\{-x\}=\{x\}=0$ nếu $x \in \mathbb{Z}$;

$$[x]+[-x]=-1 \text{ và } \{-x\}=1-\{x\} \text{ nếu } x \notin \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 2.4 $\lceil x \rceil=-[-x]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính chất 2.12a Với mọi x và y là các số thực ta có

$$[2x]+[2y] \geq [x]+[y]+[x+y] \geq 2([x]+[y])$$

và
$$[2\{x\}]+[2\{y\}] \geq [\{x\}+\{y\}].$$

Nhận xét 2.2 Tính chất 2.12a có thể được viết dưới dạng sau.

Tính chất 2.12b a) Nếu $\max\{\{x\},\{y\}\}<\frac{1}{2}$ thì

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]=0=\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

và $$[2x]+[2y]=[x]+[y]+[x+y]=2[x]+2[y].$$

b) Nếu $\min\{\{x\},\{y\}\}<\frac{1}{2}\le\max\{\{x\},\{y\}\}\le\{x\}+\{y\}<1$ thì

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]=1=\left[\{x\}+\{y\}\right]+1$$

và $$[2x]+[2y]=[x]+[y]+[x+y]+1=2[x]+2[y]+1.$$

c) Nếu $\min\{\{x\},\{y\}\}<\frac{1}{2}\le\max\{\{x\},\{y\}\}<1\le\{x\}+\{y\}$ thì

$$\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]=1=\left[\{x\}+\{y\}\right]$$

và $$[2x]+[2y]=[x]+[y]+[x+y]=2[x]+2[y]+1.$$

d) Nếu $\frac{1}{2}\le\min\{\{x\},\{y\}\}$ thì $\left[2\{x\}\right]+\left[2\{y\}\right]=2=\left[\{x\}+\{y\}\right]+1$

và $$[2x]+[2y]=[x]+[y]+[x+y]+1=2[x]+2[y]+2.$$

Tính chất 2.13 Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\left[\{x\}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\{x\}\right] \text{ và } \left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$$

Hệ quả 2.5 Với mọi số nguyên dương ta luôn có $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n$.

Tính chất 2.14a Với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\left[\{x\}-\{y\}\right]\le 0 \text{ và } [x]-[y]\ge[x-y].$$

Nhận xét 2.5 Tính chất 2.14a có thể phát biểu dưới dạng sau đây.

Tính chất 2.14b $[x-y]=\begin{cases}[x]-[y] & \text{khi } \{y\}\le\{x\};\\ [x]-[y]-1 & \text{khi } \{x\}<\{y\}.\end{cases}$

Tính chất 2.14c $[x]-[y]=\begin{cases}[x-y] & \text{khi } \{y\}\le\{x\};\\ [x-y]+1 & \text{khi } \{x\}<\{y\}.\end{cases}$