ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ HUYỀN TRANG

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ HUYỀN TRANG

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN VĂN MINH

Thái Nguyên - Năm 2010

Mục lục

Danh mục các kí hiệu, các chữ viết tắt

- AM - Arithmetic Mean.
- GM - Geometric Mean.
- HM - Harmonic Mean.
- IMO - International Mathematical Olympiad.
- JBMO - Junior Balkan Mathematical Olympiad.
- MO - National Mathematical Olympiad.
- PM - Power Mean.
- RMS - Root Mean Square.
- TST - Selection Test for International Mathematical Olympiad.
- $\sum a = a + b + c.$

Mở đầu

Bất đẳng thức là một vấn đề cổ điển xong cũng đầy thách thức trong thế giới hiện đại, ta thường thấy sự góp mặt của bất đẳng thức ở điểm khó trong các đề thi tốt nghiệp Trung học phổ thông, đề thi đại học, cao đẳng hay trong đề thi học sinh giỏi các cấp, đề thi olympic toán khu vực và quốc tế. Bất đẳng thức giữ một ví trí đặc biệt bởi nó hữu ích trong tất cả các lĩnh vực của Toán học. Sự khó khăn của các bài toán về bất đẳng thức chính là điều thú vị cuốn hút những người yêu Toán.

Mục tiêu của luận văn này là hệ thống lại một số bất đẳng thức cơ sở có nhiều ứng dụng trong quá trình giải các bài toán về bất đẳng thức: bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình, ... và ứng dụng của chúng. Hi vọng luận văn có thể làm tài liệu tham khảo cho học sinh và giáo viên trong các chuyên đề bồi dưỡng về bất đẳng thức.

Luận văn gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương một hệ thống các dạng của bất đẳng thức Cauchy, dạng thực, dạng phức, dạng đảo của bất đẳng thức Cauchy với tổng hữu hạn; bất đẳng thức Cauchy với tổng vô hạn; bất đẳng thức Cauchy - Schwarz với tích trong thực và phức; bất đẳng thức Bunyakovsky với tích phân, sau đó là các kĩ thuật vận dụng.

Chương hai trình bày về bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình, trung bình bình phương - trung bình cộng - trung bình nhân - trung bình điều hòa, dưới dạng các hệ quả của bất đẳng thức trung bình lũy thừa, và bất đẳng thức Holder, bất đẳng thức Carleman là các ứng dụng quan trọng của bất đẳng thức AM - GM. Cuối chương là một số bài tập minh họa.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới TS. Nguyễn Văn Minh về sự hướng dẫn tận tình của thầy trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các Thầy Cô, Ban giám hiệu, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, bạn bè, đồng nghiệp và gia đình đã luôn động viên, khích lệ, tạo mọi điều kiện trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để luận văn và khóa học được hoàn thành.

Mặc dù đã rất cố gắng, xong kết quả đạt được trong luận văn còn rất khiêm tốn và không tránh khỏi những sai sót. Vì vậy, tác giả mong nhận được nhiều ý kiến, góp ý quý báu của quý Thầy Cô, các anh chị và các đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, 18 tháng 09 năm 2010.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Huyền Trang

Chương 1

Bất đẳng thức Cauchy

Augustin - Louis Cauchy (1789 - 1857) công bố bất đẳng thức nổi tiếng của ông năm 1821 ở phần chú thích về lí thuyết các bất đẳng thức mà lập thành phần cuối cuốn sách Cours d'Analyse Algébrique của ông. Cauchy đã không sử dụng bất đẳng thức của ông trong nội dung chính mà chỉ có trong một số bài tập có tính minh họa. Bất đẳng thức Cauchy được áp dụng rộng rãi sớm nhất vào năm 1829, khi Cauchy đã sử dụng bất đẳng thức của ông trong một nghiên cứu về phương pháp Newton cho sự tính toán tìm nghiệm của các phương trình đại số và siêu việt. Năm 1859, học trò của Cauchy là Victor Yacovlevich Bunyakovsky nhận xét rằng khi chúng ta lấy giới hạn, chúng ta có thể thu được dạng tích phân của bất đẳng thức này. Kết quả tổng quát trong trường hợp không gian tích trong được chứng minh bởi Hermann Amandus Schwarz vào năm 1885. Ngày nay, mỗi tháng có hàng trăm - có lẽ hàng nghìn - sự công bố mới về khoa học, trong đó bất đẳng thức Cauchy được áp dụng theo cách này hay cách khác.

1.1 Các dạng của bất đẳng thức Cauchy

1.1.1 Bất đẳng thức Cauchy

Định lí 1.1. *Với hai bộ n số* $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)$*, ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2). \quad (1.1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *là hai bộ tỉ lệ, tức là tồn tại số thực k để* $a_i = kb_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Bất đẳng thức (1.1) thường được gọi là bất đẳng thức Cauchy hay Cauchy - Schwarz (đôi khi còn gọi là bất đẳng thức Bunyakovsky, Cauchy - Bunyakovsky hay Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz).

Chứng minh (Xem [1], [2], [3]).

Các hệ quả sau đây sẽ củng cố thêm các các ứng dụng khác nhau của bất đẳng thức quan trọng này.

Hệ quả 1.1. *Với 2 dãy số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n,\ b_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$ *, ta có*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}. \quad (1.2)$$

Bất đẳng thức trên thường được gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai bộ số $\left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)$ và $\sqrt{b_i},\ b_i > 0,\ \forall i = \overline{1, n}$, ta thu được bất đẳng thức (1.2).

Hệ quả 1.2. *Với 2 dãy số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$*, ta có*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + \cdots + b_n)^2}. \quad (1.3)$$

Chứng minh (Xem [2]).

Hệ quả 1.3. *Với mọi dãy số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *ta có*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2). \tag{1.4}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai bộ n số $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(1, 1, \ldots, 1)$ ta thu được bất đẳng thức (1.4).

Ta thu được hệ quả sau đây bằng cách chia cả hai vế bất đẳng thức (1.4) cho n^2.

Hệ quả 1.4. *Với mọi dãy số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *ta có*

$$\Big(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\Big)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}. \tag{1.5}$$

Hệ quả 1.5. *Với 2 dãy số thực không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *ta có*

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)} \geqslant \sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n}. \tag{1.6}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy với hai bộ n số $(\sqrt{a_i})$ và $(\sqrt{b_i})$, $a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0$, ta được điều cần chứng minh.

Hệ quả 1.6. *Với 2 dãy số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, $a_i > 0, b_i \neq 0$, *ta có*

$$\frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n^2} \geqslant \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\Big(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\Big)^2. \tag{1.7}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai bộ n số $\Big(\frac{\sqrt{a_i}}{b_i}\Big)$ và $\sqrt{a_i}$, $a_i > 0, b_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, ta thu được bất đẳng thức (1.7).

Hệ quả 1.7. *Với 2 dãy số thực dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *ta có*

$$\Big(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\Big) \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}. \tag{1.8}$$