ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN LAI

MỘT SỐ CHỨNG MINH CỦA ĐỊNH LÝ STEINER - LEHMUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN-2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN LAI

MỘT SỐ CHỨNG MINH CỦA ĐỊNH LÝ STEINER - LEHMUS

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN-2015

Mục lục

Mở đầu **ii**

1 Các chứng minh hình học của Định lý Steiner - Lehmus **1**

1.1 L. Kopeikina 1
1.2 V. Bolchianxki 2
1.3 D. Beran 3
1.4 K. R. S. Sastry 4
1.5 A. I. Fetisov 5
1.6 A. Berele & J. Goldman 8
1.7 G. Gilbert & D. MacDonnell 9
1.8 R. W. Hogg 13
1.9 Một số chứng minh khác 14

2 Các chứng minh lượng giác của Định lý Steiner - Lehmus **24**

2.1 K. Seydel & C. Newman 24
2.2 M. Hajja (I) 26
2.3 M. Hajja (II) 28
2.4 R. Oláh - Gál & J. Sándor 31
2.5 W. Chau 40

3 Một số định lý và bài toán tương tự **43**

Kết luận **52**

Tài liệu tham khảo **53**

Mở đầu

Năm 1840, một giáo viên phổ thông người Đức tại Berlin Daniel Christian Ludolph Lehmus (1780-1863) đã gửi thư cho nhà toán học Jacques Charles François Sturm, Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Pháp với đề nghị đưa ra một chứng minh hình học cho khẳng định "*Một tam giác cân (là tam giác có hai cạnh bằng nhau) khi và chỉ khi tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau*". Tuy nhiên, C. Sturm đã không đưa ra chứng minh, nhưng đã thông báo bài toán này cho các nhà toán học khác. Người đầu tiên chứng minh bài toán này là một nhà hình học nổi tiếng người Thụy Sỹ là Jakob Steiner (1796-1863). Vì vậy, sau này người ta đã lấy tên của hai nhà toán học Steiner và Lehmus để đặt tên cho định lý.

Trong chứng minh Định lý trên, J. Steiner đã sử dụng công thức tính độ dài đường phân giác thông qua độ dài các cạnh của tam giác, và bằng phương pháp biến đổi đại số. Qua đó, ông chứng minh tam giác có hai cạnh bằng nhau.

Bổ đề (Độ dài đường phân giác): "*Trong tam giác ABC, với $BC = a; CA = b; AB = c$; độ dài các đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác được tính bởi công thức*:

$$AD = \sqrt{bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}; BE = \sqrt{ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]}; CF = \sqrt{ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]}.$$

Áp dụng **Bổ đề** vào chứng minh Định lý như sau.

Giả sử tam giác ABC có hai đường phân giác BE, CF bằng nhau, tức là $BE = CF$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]} = \sqrt{ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right] = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow c\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]=b\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$
$$\Leftrightarrow (b-c)+bc\left[\frac{b}{(c+a)^2}-\frac{c}{(a+b)^2}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (b-c)+bc.\frac{(b^3-c^3)+a^2(b-c)+2a(b^2-c^2)}{(c+a)^2(a+b)^2}=0$$
$$\Leftrightarrow (b-c)\left[1+bc.\frac{(b^2+bc+c^2)+a^2+2a(b+c)}{(c+a)^2(a+b)^2}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow b-c=0$$
$$\Leftrightarrow b=c.$$

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Mặc dù Định lý đã được chứng minh bởi Steiner, song cách chứng minh mà ông đưa ra chưa thỏa mãn những người yêu toán vì chưa thực sự "*thuần túy hình học*". Bởi thế, rất nhiều nhà toán học đã cố gắng tìm kiếm một chứng minh mới, hay hơn, thú vị hơn. Hơn 150 năm trôi qua, nhiều phép chứng minh mới nối tiếp nhau ra đời. Cho đến ngày nay, Định lý đã có hơn 80 cách chứng minh khác nhau, trong đó có những chứng minh ít người biết đến, và có những chứng minh mới tìm ra trong thời gian gần đây. Với khát khao vươn tới cái đẹp, Định lý này chắc chắn sẽ không dừng lại ở đây, nó sẽ vẫn còn có sức hấp dẫn lớn đối với các nhà toán học nói riêng và những người yêu toán nói chung.

Nhờ phát biểu đơn giản và có những chứng minh đẹp, ngắn gọn, Định lý này đã được một số lần chọn làm đề thi học sinh giỏi của Việt Nam.

Luận văn "*Một số chứng minh của của Định lý Steiner- Lehmus*" có với mục đích mô tả một bức tranh sinh động về Định lý này với lịch sử chứng minh và những phát hiện toán học. Hy vọng nó sẽ thú vị cho những ai yêu thích vẻ đẹp của chứng minh các kết quả toán học.

Luận văn gồm 3 chương

Chương I: Trình bày một số chứng minh hình học của Định lý Steiner-Lehmus.

Chương II: Trình bày một số chứng minh lượng giác của Định lý Steiner-Lehmus.

Chương III: Trình bày một số định lý và bài toán tương tự.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Tạ Duy Phượng. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới Thầy.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các thầy cô giáo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã nhiệt tình giảng dạy, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu.

Và cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn ủng hộ, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2015

Học viên

Trần Văn Lai

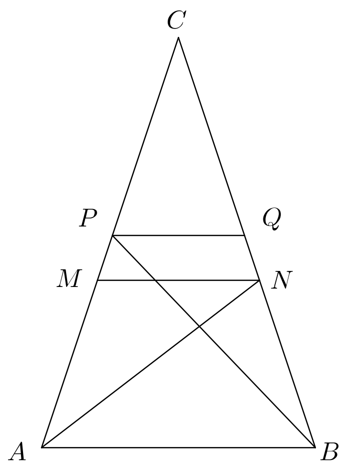
Chương 1

Các chứng minh hình học của Định lý Steiner - Lehmus

1.1 L. Kopeikina

Định lý Steiner-Lehmus nhiều năm liền đã được cho như là một bài tập bởi các thầy trong Câu lạc bộ Toán học trực thuộc Khoa Toán trường Đại học Tổng Hợp Matxcơva không biết chứng minh. Cuối cùng, vào năm 1939, một nữ sinh lớp 10 ở Matxcơva tên là Lida Kopeikina [1] (đã trở thành Phó Giáo Sư vào năm 1960) đã tìm ra một cách chứng minh định lý Steiner - Lehmus khá đơn giản sau đây:

Giả sử hai đường phân giác AN và BP bằng nhau. Kẻ MN và PQ song song với AB, cắt AC và BC theo thứ tự tại M và Q (Hình 1.1)



Hình 1.1

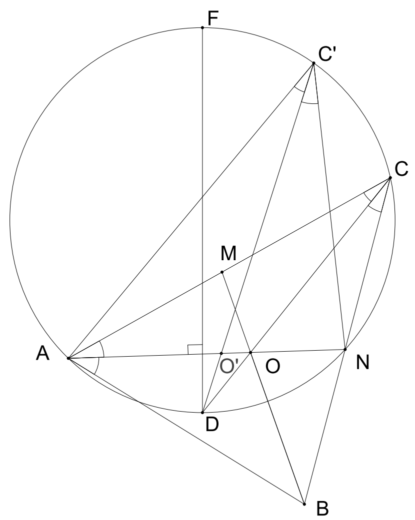
Chứng minh MN và PQ trùng nhau bằng phản chứng.

Giả sử MN gần AB hơn PQ, khi đó $MN > PQ$. Do $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} = \widehat{BPQ}$ nên $\triangle PBQ$ là tam giác cân, suy ra $PQ = QB$. Tương tự $AM = MN$. Hai tam giác cân $\triangle PBQ$ và $\triangle AMN$ có cạnh đáy bằng nhau, cạnh bên $PQ < MN$ nên $\widehat{PQB} > \widehat{AMN}$ suy ra $\widehat{QBA} < \widehat{MAB}$, từ đó suy ra trong hình thang $AMNB$ có $AM < BN$ mà $AM = MN, PQ = QB, MN > PQ, QB > BN$, dẫn đến mâu thuẫn. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ MN và PQ trùng nhau. Khi đó $AMNB$ là hình thang cân nên $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ hay $\triangle ABC$ là tam giác cân.

1.2 V. Bolchianxki

Một năm sau chứng minh của Lida Kopeikina (năm 1940) một học sinh lớp 8 ở Matxcơva tên là Volodia Bolchianxki [1] sau này là Viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Giáo dục Liên Bang Nga, tác giả của nhiều công trình quan trọng trong toán học và phương pháp dạy toán, đã tìm ra một cách chứng minh khác cũng khá đẹp.

Giả sử O là giao điểm của hai đường phân giác bằng nhau AN và BM (Hình 1.2).



Hình 1.2

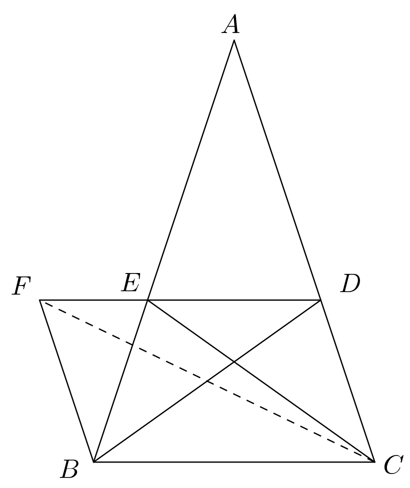
Khi đó CO là phân giác của $\widehat{ACB}$. Xét hai tam giác ANC và BMC có $\widehat{ACB}$ chung, $AN = BM$, đường phân giác ở đỉnh C là CO chung thì hai tam giác ANC và BMC bằng nhau. Để làm điều đó ta vẽ đường tròn ngoại tiếp $\triangle ANC$ với đường kính DF vuông góc với AN tại trung điểm của AN. Vẽ dây cung AC' sao cho $\widehat{NAC'} = \widehat{CBM}$ và C', C nằm cùng phía đối với đường thẳng AN. Ta có $\widehat{AC'N} = \widehat{ACN}$ (*góc nội tiếp cùng chắn dây cung* $\overset{\frown}{AN}$) nên $\widehat{ANC'} = 180^o - \widehat{AC'N} - \widehat{NAC'} = 180^o - \widehat{ACN} - \widehat{CBM} = \widehat{BMC}$, suy ra $\triangle BMC = \triangle ANC'$ (*cạnh - góc - cạnh*) (*). AN cắt DC và DC' theo thứ tự tại O và O'. Nếu C khác C', chẳng hạn cung $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ bé hơn cung $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$' thì $DO > DO'$. Do $DC < DC'$ nên $CO < C'O'$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $CO = C'O'$. Chứng minh tương tự khi cung $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ lớn hơn cung $\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$'. Vậy C' trùng với C, từ (*) suy ra $BC = AC$ hay $\triangle ABC$ là tam giác cân.

1.3 D. Beran

Chứng minh của David Beran đã được trình bày trong [4].

Giả thiết BD và CE là hai đường phân giác trong tương ứng góc B và góc C của $\triangle ABC$, $BD = CE$.

Lấy F là điểm nằm đối diện với C qua cạnh BD thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $DF = BC$ và $\widehat{BDF} = \frac{1}{2}C$ (Hình 1.3).



Hình 1.3

Dễ dàng nhận thấy $\triangle BDF = \triangle ECB$ (cạnh - góc - cạnh), suy ra $BF = EB$ và $\widehat{BEC} = \widehat{FBD}$.

Ta có: $\widehat{FBC} = \widehat{FBD} + \widehat{BDC} = \widehat{BEC} + \dfrac{B}{2}$.

Hơn nữa, $\widehat{BEC}$ là góc ngoài tam giác $\triangle AEC$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{EAC} + \widehat{ACE}$ hay $\widehat{BEC} = A + \dfrac{C}{2}$, do đó ta có $\widehat{FBC} = \left(A + \dfrac{C}{2}\right) + \dfrac{B}{2} = \dfrac{A+B+C}{2} + \dfrac{A}{2} = 90^o + \dfrac{A}{2}$.

Tương tự: $\widehat{CDF} = \widehat{CDB} + \widehat{BDF} = \left(A + \dfrac{B}{2}\right) + \dfrac{C}{2} = \dfrac{A+B+C}{2} + \dfrac{A}{2} = 90^o + \dfrac{A}{2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{FBC} = \widehat{CDF}$.

Xét hai tam giác tù: $\triangle FBC$ và $\triangle CDF$ có

(i) FC là cạnh chung,

(ii) $\widehat{FBC} = \widehat{CDF}$,

(iii) $DF = BC$ (theo cách dựng).

Suy ra cặp cạnh tương ứng còn lại bằng nhau, nghĩa là $BF = DC$.

Mặt khác, ta đã chỉ ra $BF = EB$ nên $DC = EB$, từ đó ta dễ dàng có $\triangle BEC = \triangle CDB$ (cạnh - cạnh - cạnh), suy ra $B = C$ hay $\triangle ABC$ là tam giác cân.

1.4 K. R. S. Sastry

Dưới đây trình bày chứng minh của K. R. S. Sastry trong [12].

Giả thiết: BE và CF là hai đường phân giác trong tương ứng góc B và góc C của $\triangle ABC$, $BE = CF$.

Phản chứng: $\triangle ABC$ không phải là tam giác cân hay $AB \neq AC$, chẳng hạn $AB < AC$. Từ bất đẳng thức $AB < AC$ kéo theo $C < B$ hay $\dfrac{C}{2} < \dfrac{B}{2}$. a Để ý rằng, $\triangle BEC$ và $\triangle CBF$ có chung cạnh BC, $BE = CF$ và $\dfrac{C}{2} < \dfrac{B}{2}$, suy ra $CE > BF$.

Lấy điểm G là sao cho tứ giác $BFGE$ là hình bình hành (Hình 1.4).