

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC  
-----\*\*\*-----

TRẦN QUỐC HỘI

**BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH  
VÀ ỨNG DỤNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

*Thái Nguyên – Năm 2010*

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**  
-----\*\*\*-----

**TRẦN QUỐC HỘI**

**BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH  
VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.36

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**  
**TS. NGUYỄN VĂN NGỌC**

*Thái Nguyên – Năm 2010*

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC  
-----\*\*\*-----

TRẦN QUỐC HỘI

# BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.36

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

*Thái Nguyên – Năm 2010*

Công trình được hoàn thành tại  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

Người hướng dẫn khoa học: **TS. NGUYỄN VĂN NGỌC**

**Phản biện 1.**

.....  
.....

**Phản biện 2.**

.....  
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

*Ngày.....tháng.....năm 2010*

Có thể tìm hiểu luận văn tại: **Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên**  
**Thư viện trường Đại học Khoa Học**



# Mục lục

---

Mục lục . . . . .	1
Mở đầu . . . . .	3
<b>Chương 1. Biến đổi Fourier rời rạc</b>	<b>6</b>
1.1. Căn bậc $N$ của đơn vị và các tính chất . . . . .	7
1.1.1. Định nghĩa . . . . .	7
1.1.2. Các tính chất của $W_N$ . . . . .	7
1.2. Hàm rời rạc tuần hoàn trong không gian Unita $\mathbb{C}^N$ . . . . .	8
1.2.1. Hàm rời rạc tuần hoàn . . . . .	8
1.2.2. Không gian Unita $\mathbb{C}^N$ . . . . .	9
1.3. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn . . . . .	11
1.3.1. Dẫn luận . . . . .	11
1.3.2. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc . . . . .	12
1.4. Công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược của dãy tuần hoàn	13
1.5. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn . . . . .	14
1.5.1. Tính tuyến tính. . . . .	14
1.5.2. Tích chập. . . . .	14
1.5.3. Đẳng thức Parseval . . . . .	16
1.5.4. Tính tuần hoàn . . . . .	16
1.5.5. Dịch chuyển và biến điệu . . . . .	17
1.6. Các ví dụ . . . . .	18
1.7. Biến đổi Fourier rời rạc của dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn . . . . .	21
1.8. Biến đổi cosine và sine rời rạc . . . . .	22
1.8.1. Định nghĩa biến đổi rời rạc tổng quát . . . . .	22
1.8.2. Các phép biến đổi DCT - 1 và DCT - 2 . . . . .	23

<b>Chương 2. Biến đổi Fourier nhanh</b>	<b>25</b>
2.1. Thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian đổi với $N = 2^k$ . . . . .	26
2.1.1. Mô tả thuật toán FFT . . . . .	26
2.1.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo thời gian đổi với $N = 2^3$	28
2.2. Hiệu quả tính toán của thuật toán FFT . . . . .	28
2.3. Thuật toán Fourier nhanh rút gọn theo tần số . . . . .	31
2.3.1. Nội dung của thuật toán rút gọn theo tần số . . . . .	31
2.3.2. Sơ đồ thuật toán FFT theo tần số với $N = 2^3$ . . . . .	33
2.4. Biến đổi Fourier nhanh đổi với trường hợp $N = RC$ . . . . .	33
2.4.1. Trường hợp $N = 6 = 3 \cdot 2$ . . . . .	34
2.4.2. Dạng nhân tử FFT tổng quát . . . . .	36
<b>Chương 3. Một số ứng dụng</b>	<b>39</b>
3.1. Giải phương trình vi phân thường . . . . .	39
3.2. Bài toán biên Dirichlet cho phương trình Helmholtz . . . . .	41
3.2.1. Đặt bài toán . . . . .	41
3.2.2. Rời rạc hóa bài toán . . . . .	41
3.2.3. Fourier rời rạc và Fourier nhanh . . . . .	42
3.3. Tín hiệu tiếng hát . . . . .	43
3.3.1. Định nghĩa . . . . .	43
3.3.2. Các tính chất cơ bản . . . . .	44
3.4. Một số hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số . . . . .	47
<b>Kết luận</b> . . . . .	<b>61</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b> . . . . .	<b>62</b>

# Mở đầu

---

Lợi ích của xử lý số các tín hiệu ngày càng được khẳng định rõ ràng. Nó cũng được ứng dụng ở nhiều dạng khác nhau với những hiệu quả đặc biệt là trong các ngành khoa học chứ không phải chỉ là một môn học. Với mức độ phát triển ngày càng cao về cơ bản, về phương pháp và khả năng ứng dụng nó đã lôi cuốn được nhiều kỹ sư, các nhà vật lý cũng như các nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, biến đổi Fourier rời rạc (DFT) chiếm vị trí hàng đầu nhờ sự tồn tại các thuật toán hiệu quả của biến đổi Fourier rời rạc. Biến đổi Fourier nhanh (FFT) là công cụ hữu hiệu để tính các biến đổi Fourier rời rạc và Fourier rời rạc ngược. Thuật toán *FFT* được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, từ các phép toán số học của số phức đến lý thuyết tín hiệu, lý thuyết nhóm và lý thuyết số.v.v...

Từ khi Cooley và Tukey phát hiện ra thuật toán tính nhanh các biến đổi Fourier rời rạc vào năm 1965 (người ta quen gọi là biến đổi Fourier nhanh - FFT), thuật toán này ngày càng khẳng định vai trò của mình, đặc biệt là xử lý tín hiệu số. Để tính DFT chiều dài  $N$  cần số phép nhân là  $N^2$  và  $N(N - 1)$  phép toán cộng. Thời gian tính toán sẽ rất đáng kể nếu  $N$  đủ lớn. Một thuật toán nhanh hơn nhiều đã được phát triển bởi Cooley và Tukey khoảng năm 1965 gọi là thuật toán FFT. Điều kiện bắt buộc thuật toán này là chiều dài  $N$  phải là lũy thừa của 2, tức là  $N$  có dạng  $N = 2^s$ . Thuật toán này dựa vào trên việc khai triển biến đổi Fourier rời rạc của dãy có chiều dài  $N = 2^s$  thành các tầng lớp nhỏ hơn. Cách mà trong đó nguyên tắc này thực hiện đưa đến nhiều thuật toán khác nhau, tất cả đều có mục đích là cải thiện khả năng tăng tốc độ tính toán. Đó là thuật toán FFT phân tích theo thời gian, thuật toán FFT phân tích theo tần số.v.v... Đối với các thuật toán FFT chiều dài  $N$  thì chỉ cần  $\frac{N}{2} \log_2 N$  phép toán nhân và  $N \log_2 N$  phép cộng. Ngoài ra, còn



trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp  $N = RC$ , trong đó  $R$  hoặc  $C$  không phải là lũy thừa của 2. Đối với thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp  $N = RC$  thì chỉ cần  $N(R + C)$  phép nhân.

Luận văn trình bày cơ sở lý thuyết của biến đổi Fourier rời rạc và của thuật toán Fourier nhanh. Ngoài ra, cũng giới thiệu một số ứng dụng của biến đổi trên vào các bài toán về phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật, xử lý tín hiệu tiếng hát trong Rada. Ngoài ra, luận văn trình bày một số bài toán về hàm hệ và tín hiệu đầu ra của các hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số.

Hiện nay tài liệu bằng tiếng Anh về DFT và FFT rất phong phú. Tuy nhiên, tài liệu bằng tiếng Việt về lĩnh vực này còn rất hạn chế và chủ yếu được trình bày trong các sách kỹ thuật dành cho các kỹ sư.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 3 chương.

### Chương 1 **Biến đổi Fourier rời rạc.**

Trong chương này trình bày lý thuyết của biến đổi Fourier rời rạc cho dãy số tuần hoàn.

### Chương 2 **Biến đổi Fourier nhanh.**

Trong chương này trình bày hai thuật toán biến đổi Fourier nhanh, đó là thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo thời gian và thuật toán biến đổi Fourier nhanh rút gọn theo tần số. Ngoài ra, trình bày thuật toán biến đổi Fourier nhanh cho trường hợp  $N = RC$ , trong đó  $R$  hoặc  $C$  không phải là lũy thừa của 2.

### Chương 3 **Một số ứng dụng.**

Trong chương này trình bày một số ứng dụng của biến đổi Fourier rời rạc vào các bài toán về phương trình vi phân thường, bài toán biên Dirichlet của phương trình Poisson trong hình chữ nhật. Xử lý tín hiệu tiếng hát trong Rada và một số bài toán về hàm hệ và tín hiệu đầu ra của các hệ thống tuyến tính trong lý thuyết tín hiệu số.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Tôi xin cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K2 Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT Tỉnh Lạng Sơn, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Vũ Lễ - Bắc Sơn, Trường THPT Việt Bắc - TP. Lạng Sơn đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2010

**Tác giả**

**Trần Quốc Hội**